زاد المعرفة

الأستاذ . بوعجاب عبد القادر

في

المراجعة النهائية

للرياضيات

- دروس ملخصة
- تمارين محلولة بالتفصيل
- مواضيع بكالوريا محلولة

3AS

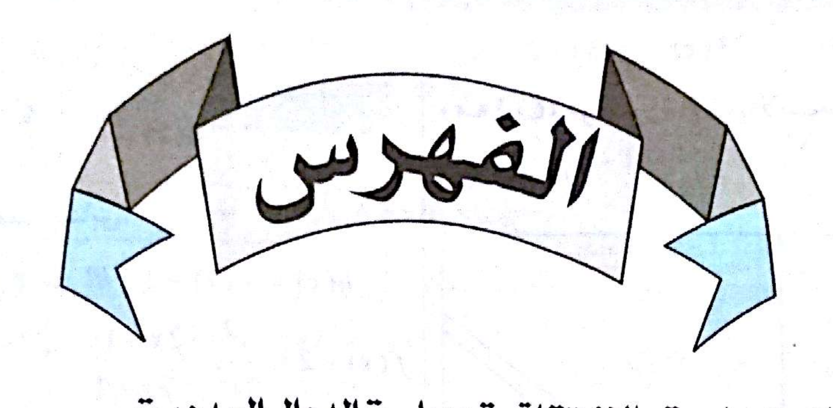
علوم تجريبية - رياضيات

تقني رياضي

منشورات كليك






الفهرس

النهايات - الاستمرارية - الاشتقاقية - دراسة دوال عددية

حساب النهايات :

$\frac{\infty}{0}=\infty$	$\frac{a}{0}=\infty \quad (a\in R^*)$	$\frac{a}{\infty}=0$
$\frac{0}{\infty}=0$	$\frac{0}{a}=0 \quad (a\in R^*)$	

حالات عدم التعيين : $0\times\infty \;;\; +\infty-\infty \;;\; \frac{\infty}{\infty} \;;\; \frac{0}{0}$

لإزالة حالة عدم التعيين يمكن أن نتبع إحدى الطرق التالية:

الاختزال أو التحليل او المرافق أوالعدد المشتق.

النهايات والحصر : الحصر عند نهاية منتهية :

f, h, g دوال عددية معرفة على المجال I و l عدد حقيقي.

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$ و كانت

$g(x)\le f(x)\le h(x)$ من أجل كل x من I فإن :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

مثال : برهن أنه إذا كان $x>-1$ فإن :

$\frac{-1}{x+1}\le\frac{\cos x}{x+1}\le\frac{1}{x+1}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}$.

* $x>-1$ و منه فإن : $x+1>0$ كما أن :

$-1\le\cos x\le 1$ و منه فإن: $\frac{-1}{x+1}\le\frac{\cos x}{x+1}\le\frac{1}{x+1}$.

* بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0$.

المستقيمات المقاربة : (a عدد حقيقي ثابت)

المستقيم المقارب العمودي على محور الفواصل :

☜ (إذا كانت : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ فإن : (C_f)

يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل معادلته $(x=a)$.

المستقيم المقارب الموزاي لمحور الفواصل :

☜ (إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ فإن :

(C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل

معادلته $(y=a)$.

المستقيم المقارب المائل :

☜ (إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ فإنه يحتمل وجود

مستقيم مقارب مائل معادلته من الشكل $(y=ax+b)$

طريقة إثبات أن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=0$

فإن: المستقيم $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

طريقة إيجاد معادلة المستقيم المقارب المائل مباشرة من عبارة الدالة f :

إذا كانت: عبارة f من الشكل: $f(x)=ax+b+h(x)$

وكانت: $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$

فإن: $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

■ دراسة وضعية منحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) الذي معادلته $y = ax + b$:

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y = f(x) - (ax + b)$

تمرين تطبيقي

f هي الدالة العددية المعرفة على $]-2\,;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$$

- أحسب النهايات ثم أعط التفسير البياني لكل نهاية .
- عين الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث يكون :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$$

- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x - 2$ مقارب مائل لـ : (C_f).
- أدرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f).

الحل:

* حساب النهايات مع إعطاء التفسير البياني لكل نهاية :

لدينا : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \left(\frac{x^2 + 5}{x + 2}\right) = +\infty$

لأن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} (x^2 + 5) = 9$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} (x + 2) = 0^+$

و عليه فإن المستقيم الذي معادلته $x = -2$ هو مستقيم مقارب يوازي (yy').

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ لأن :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x + 2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

*تعيين الأعداد الحقيقية a , b , c :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$$

$$f(x) = \frac{(ax + b)(x + 2) + c}{x + 2}$$

$$= \frac{ax^2 + 2ax + bx + 2b + c}{x + 2}$$

$$= \frac{ax^2 + (2a + b)x + 2b + c}{x + 2}$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ 2b + c = 5 \end{cases}$

و عليه : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 9 \end{cases}$

و بالتالي فإن : $f(x) = x - 2 + \frac{9}{x + 2}$

* إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x - 2$ مقارب مائل لـ : (C_f) :

لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - 2 + \frac{9}{x + 2} - (x - 2)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{9}{x + 2}\right) = 0$$

و منه: $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

* دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

بما أن : $f(x) - y = \frac{9}{x + 2}$ و $x > -2$

فإن : $f(x) - y > 0$

و بالتالي فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ).

■ الاستمرارية ونظرية القيم المتوسطة :

*دراسة استمرارية دالة f عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها:

تكون f مستمرة عند a إذا تحقق ما يلي :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ملاحظة: (في بعض الدوال ندرس الاستمرارية من اليمين ومن اليسار عند القيمة a)

* دراسة الاستمرارية على يمين a :

إذا كانت: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ فإن f مستمرة على يمين a.

* دراسة الاستمرارية على يسار a :

إذا كنت: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ فإن f مستمرة على يسار a.

* نظرية القيم المتوسطة :

∴ طريقة إثبات أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$:

1) f مستمرة على المجال $[a,b]$

2) f رتيبة على المجال $[a,b]$ (أي متناقصة أو متزايدة)

3) k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

إذا تحقق 1 و 2 و 3 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$.

ملاحظة مهمة :

يمكن أن يطرح السؤال كالآتي :

أثبت أن (C_f) يقطع المستقيم الذي معادلته $y = k$ في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]a;b[$.

* حالة خاصة :

∴ طريقة إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$:

1) f مستمرة على المجال $[a,b]$

2) f رتيبة على المجال $[a,b]$ (أي متناقصة أو متزايدة).

3) 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

أو : $f(a) \times f(b) < 0$

إذا تحقق 1 و 2 و 3 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a;b[$

ملاحظة مهمة :

يمكن أن يطرح السؤال كالآتي :

أثبت أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $[a,b]$.

تمرين تطبيقي

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1,2]$ بـ : $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

* بين أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا α في المجال $]1,2[$.

الحل

f مستمرة على المجال $[1,2]$ لأنها دالة كثير حدود و $f(1) = 1$ و $f(2) = 13$.

و بما أن $1 < 3 < 13$ أي $f(1) < 3 < f(2)$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا α حيث $\alpha \in]1,2[$.

تمرين تطبيقي

g دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1,6 و 1,7 .

الحل

1) تغيرت الدالة g :

g معرفة وقابلة للاشتقاق على IR ومنه قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالنها المشتقة:

$$g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

إشارة $g'(x)$

قيم x	-1		0		1		$+\infty$
إشارة: $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه : g متزايدة على كل من المجالات $[1;+\infty[$; $]-1;0]$

و متناقصة لما $x \in [0;1]$

2) $g(1,6)=2(4,096)-3(2,56)-1=-0,488$

و $g(1,7)=9,826-8,67-1=0,156$

لدينا الشروط التالية :

1) g مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,6;1,7]$

2) 0 محصور بين $g(1,6)$ و $g(1,7)$

أو: $g(1,6)\times g(1,7)<0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد α من المجال $]1,6;1,7[$ يحقق $g(\alpha)=0$ وبما أن g متزايدة تماما على $]1,6;1,7[$ فإن α وحيد .

تمرين تطبيقي:

بين أن المعادلة : $2x^3-5x^2-3=0$ تقبل حلا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$

الحل:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$

حيث: $f(x)=2x^3-5x^2-3$

f دالة مستمرة على المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$ لأنها دالة كثير حدود

و $f\left(\frac{5}{2}\right)=-3$ ، $f(3)=6$.

و بما أن $f(3)\times f\left(\frac{5}{2}\right)<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $2x^3-5x^2-3=0$ تقبل حلا α

حيث: $\alpha \in \left]\frac{5}{2},3\right[$.

■ الإشتقاقية:

تعريف: f دالة معرفة على مجال مفتوح من مجموعة الأعداد الحقيقية يشمل العدد a فإن f قابلة للاشتقاق عند a

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ منتهية .

معناه : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$ حيث : (L عدد حقيقي ثابت).

ويسمى L العدد المشتق للدالة f عند العدد الحقيقي a .

ونرمز له بـ : $f'(a)=L$.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على R بـ: $f(x)=3x^2-2x-1$

دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد $a=2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x^2-2x-1)-(7)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{x-2}$$

لاحظ : (البسط $\to 0$ و المقام $\to 0$)

لدينا: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2).(3x+4)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}(3x+4)=10$$

ومنه : نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $a=2$ والعدد المشتق للدالة f عند العدد $a=2$ هو :

$f'(2)=10$.

ملاحظة : بوضع: $x-a=h$ ، ومنه : $x=a+h$.

وإذا كان: $x\to a$ فإن: $x-a\to 0$ أي: $h\to 0$

ومنه : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

أي لدراسة الاشتقاق عند العدد a يمكن حساب:

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وإذا كانت النتيجة منتهية نقول f قابلة للاشتقاق عند a .

مثال: (نفس المثال السابق) . $f(x)=3x^2-2x-1$

• دراسة اشتقاق الدالة f عند العدد $a=2$:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\left(3(2+h)^2-2(2+h)-1\right)-(7)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{3h^2+10h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h(3h+10)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(3h+10)=10$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $a=2$ والعدد المشتق للدالة f عند العدد $a=2$ هو :

. $f'(2)=10$

***العدد المشتق على اليمين :**

تعريف :

إذا كانت دالة f معرفة على مجال من الشكل $[a\,;a+h[$ حيث h عدد حقيقي موجب تماما .

وكانت : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$

حيث : (L عدد حقيقي ثابت).

نقول أن f تقبل الاشتقاق على اليمين عند العدد الحقيقي a، ويسمى العدد L العدد المشتق للدالة f على يمين العدد a.

***العدد المشتق على اليسار:**

تعريف :

إذا كانت دالة f معرفة على مجال من الشكل $]a-h\,;a]$ حيث h عدد حقيقي موجب تماما .

وكانت : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$ حيث (L عدد حقيقي ثابت).

نقول أن f تقبل الاشتقاق على اليسار عند العدد الحقيقي a، ويسمى العدد L العدد المشتق للدالة f على يسار العدد a.

ملاحظة :

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين وعلى يسار العدد الحقيقي a.

و $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

نقول أن f قابلة للاشتقاق عند a.

مثال01 : $f(x)=x.|x|$ المعرفة على R.

دراسة الاشتقاق عند 0 :

كتابة عبارة الدالة f بدون رمز القيمة المطلقة :

$f(x)=x.(x)=x^2$ إذا كان $x\geq0$

$f(x)=x.(-x)=-x^2$ إذا كان $x\leq0$

لدينا :

$$\lim_{\substack{x\to0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\ >}}\frac{x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\ >}}(x)=0$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يمين 0 والعدد المشتق على يمين 0 يساوي : 0 .

ولدينا:

$$\lim_{\substack{x\to0\\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\ <}}\frac{-x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\ <}}(-x)=0$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يسار 0 والعدد المشتق على يسار 0 يساوي : 0 .

• بما أن العدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار فإن f قابلة للاشتقاق عند 0 .

مثال 02: $f(x)=x.|x-1|$ المعرفة على R.

دراسة الاشتقاق عند 1 :

كتابة عبارة الدالة f بدون رمز القيمة المطلقة :

$f(x)=x.(x-1)=x^2-x$ إذا كان $x\geq1$

$f(x)=x.(-x+1)=-x^2+x$ إذا كان $x\leq1$

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}}\frac{x^2-x}{x-1}$

$$=\lim_{\substack{x\to1\\ >}}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\ >}}x=1$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يمين 1 والعدد المشتق على يمين 1 يساوي : 1 .

ولدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-x^2+x}{x-1}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} -x = -1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يسار 1 والعدد المشتق على يسار 1 يساوي : 1- .

- بما أن العدد المشتق على اليمين لا يساوي العدد المشتق على اليسار فإن f غير قابلة للاشتقاق عند 1 .

***الدالة المشتقة :**

تعريف: f دالة معرفة على مجال مفتوح I من R.

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال I .

وتسمى الدالة التي ترفق بكل عدد x_0 من I العدد المشتق $f'(x_0)$ بالدالة المشتقة الأولى للدالة f ونرمز لها بالرمز $f'(x)$.

وإذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة هي f'' وتسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f وهكذا نسمي الدوال f' ، f'' ، ......، $f^{(n)}$ بالمشتقات المتتابعة للدالة f .

ملاحظات :

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على R .
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال مفتوح من مجموعة تعريفها .
- الدوال الصماء قابلة للاشتقاق على كل مجال مفتوح من مجموعة تعريفها.
- الدوال المثلثية من الشكل : $x \mapsto \sin(ax+b)$ ، $x \mapsto \cos(ax+b)$ (حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان) قابلة للاشتقاق على R .

***جدول مشتقات دوال مألوفة :**

مجال قابلية الاشتقاق	$f'(x)$	$f(x)$
$]-\infty;+\infty[$	0	λ (λ عدد حقيقي ثابت)
$]-\infty;+\infty[$	1	x
$]-\infty;+\infty[$	$n.x^{n-1}$	x^n n عدد طبيعي و $n \geq 2$
$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$]-\infty;+\infty[$	$\cos x$	$\sin x$
$]-\infty;+\infty[$	$-\sin x$	$\cos x$

***العمليات على المشتقات : (الجمع ، الجداء ، النسبة)**

U و V دالتان قابلتان الاشتقاق على مجال I و α عدد حقيقي ثابت .

الدالة المشتقة	الدالة
$U'+V'$	$U+V$
$U'.V+V'.U$	$U \times V$
$\alpha.U'$	$\alpha.U$
$\frac{U'V-V'U}{V^2}$	$\frac{U}{V}$
$\frac{-U'}{U^2}$	$\frac{1}{U}$

أمثلة :

عين مشتقة كل دالة من الدوال التالية المعرفة على المجال I في كل حالة :

1) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2-5x+\frac{2}{3}$ ، $I=]0;+\infty[$.

2) $f(x)=(x^2-1)\sqrt{x}$ ، $I=]0;+\infty[$.

3) $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-4}$ ، $I=]2;+\infty[$.

4) $f(x)=1-2x+\frac{3}{5x-10}$ ، $I=]-\infty;2[$.

الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $I=]0;+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{1}{2}(4x^3)-3(2x)-5(1)+0=2x^3-6x-5$$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

$$f'(x)=(2x)\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)$$

$$=\frac{2x\sqrt{x}.2\sqrt{x}+x^2-1}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}$$

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{2(x^2-4)-2x(2x-3)}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^2+6x-8}{(x^2-4)^2}$$

4) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;2[$ ولدينا :

$$f'(x)=-2-\frac{3(5)}{(5x-10)^2}=-2-\frac{15}{(5x-10)^2}$$

مشتقة دالة مركبة :

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على المجال J و g دالة قابلة للاشتقاق على المجال I حيث من أجل كل عدد حقيقي x من I فإن : $g(x)\in J$ فيكون من أجل كل عدد حقيقي x من I : $[(f\circ g)(x)]'=g'(x)\times f'(g(x))$

مثال 01: $f(x)=\sin(2x-3)$

نلاحظ أن الدالة f هي مركب دالتين $V\circ U$.

حيث : $U(x)=\sin x$ (قابلة للاشتقاق على R)

بحيث: $U'(x)=\cos x$

$V(x)=2x-3$ (قابلة للاشتقاق على R)

بحيث: $V'(x)=2$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على R ولدينا :

$$f'(x)=V'(x)\times U'(V(x))=2\cos\ (2x-3)$$

مثال 02: $f(x)=(2x-3)^5$

نلاحظ أن الدالة f هي مركب دالتين $V\circ U$ حيث :

$U(x)=x^5$ (قابلة للاشتقاق على R).

ومنه : $U'(x)=5x^4$

$V(x)=2x-3$ (قابلة للاشتقاق على R).

ومنه : $V'(x)=2$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على R ولدينا :

$$f'(x)=V'(x)\times U'(V(x))=2\times 5\,(2x-3)^4$$
$$=10\,(2x-3)^4$$

نتائج :

1) $(\sqrt{U})'=\frac{U'}{2\sqrt{U}}$

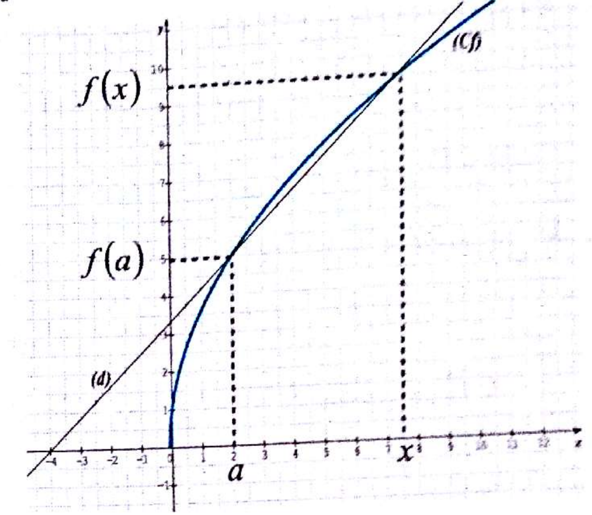
2) $(U)^n=n.U'.U^{n-1}$

3) $(\sin(ax+b))'=a.\cos\,(ax+b)$

4) $(\cos\,(ax+b))'=-a.\sin\,(ax+b)$

التفسير الهندسي للعدد المشتق و معادلة المماس :

f دالة معرفة على مجال I من R و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني .



لتكن النقطة M_0 من $\left(C_f\right)$ ذات الفاصلة a .

ولتكن $M\left(x;f(x)\right)$ نقطة متغيرة من $\left(C_f\right)$.

ننشئ المستقيم (d) الذي يشمل النقطتين M_0 و M .

نحسب معامل توجيه (ميل)المستقيم (d) باستعمال النقطتين M_0 و M .

معامل توجيه المستقيم (d) : $\alpha=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

نلاحظ أنه :

لما x يؤول لـ a فإن $f(x)$ يؤول لـ $f(a)$.

ومنه فإن : النقطة M تقترب من النقطة M_0

وهكذا فإن المستقيم (d) يكون مماسا لـ $\left(C_f\right)$ عند النقطة M_0 معامل توجيهه : $\alpha=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ملاحظات :

- إذا كان α عدد حقيقي ثابت غير معدوم فإن : $\alpha=f'(a)$

ونقول أن $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a

معادلته : $y=\alpha.x+\beta$ أي : $y=f'(a).x+\beta$

وبما أن النقطة M_0 تنتمي للمماس فإن إحداثياتها تحقق معادلة المماس ومنه : $f(x_0)=f'(a).a+\beta$

أي : $\beta=f(x_0)-a.f'(a)$

بتعويض قيمة β في المعادلة $y=f'(a).x+\beta$ نحصل على المعادلة : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

- إذا كانت $\alpha=0$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند a و $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a موازي لمحورا لفواصل .
- إذا كانت :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$$

فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a و $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a موازي لمحور التراتيب .

- إذا كانت :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ <}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L\ ,\ \lim_{\substack{x\to a\\ >}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L'$$

حيث: $L\neq L'$ فإن الدالة .

f غير قابلة للاشتقاق عند a و $\left(C_f\right)$ يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة a معامل توجيههما $L\ ;\ L'$.

* اتجاه تغير دالة:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R .

- إذا كانت $f'(x)>0$ من أجل كل x من I فإن الدالة f متزايدة تماما على I .

(يمكن أن تكون f' منعدمة من أجل قيم منعزلة من I)

- إذا كانت $f'(x)<0$ من أجل كل x من I فإن الدالة f متناقصة تماما على I .

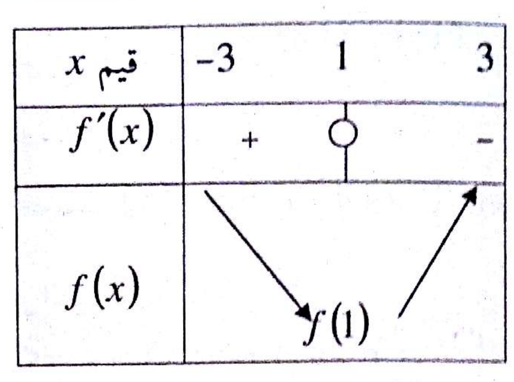
(يمكن أن تكون f' منعدمة من أجل قيم منعزلة من I)

- إذا كانت $f'=0$ من أجل كل x من I فإن الدالة f ثابتة على I .

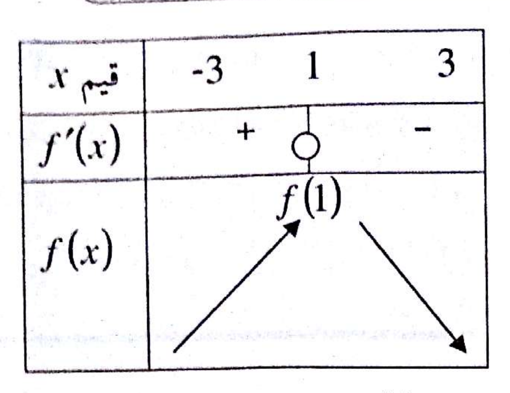
القيم الحدية المحلية :

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من R و a عدد حقيقي من I حيث : $f'(a)=0$ و غيرت f' من إشارتها عند القيمة a . فإن : $f(a)$ قيمة حدية محلية للدالة f .

مثال :



$f(1)$ قيمة حدية محلية صغرى



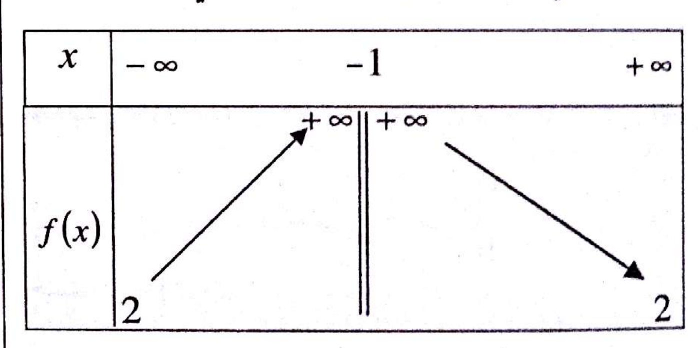
$f(1)$ قيمة حدية محلية عظمى

تمارين

التمرين 01:

f دالة عددية معرفة على $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ (C_f)

تمثيلها البياني و جدول تغيراتها معطى كما يلي :



1/ عين النهايات ثم فسر بيانيا كل نهاية.

2/ أجب بصحيح أو خطأ على كل سؤال مما يلي مع تبرير الإجابة .

أ- المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب لـ (C_f).

ب- المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا .

ج- مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي $S =]-\infty;-1[$.

د- على المجال $]-\infty\,;-1[$ يكون : $f(x) > f(-2)$

عندما يكون $x < -2$.

هـ- النقطة $A(-3\,;1)$ تنتمي إلى (C_f) .

و- الدالة f زوجية.

حل التمرين 01 :

1/ تعيين النهايات ثم التفسير البياني :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

فإن : $y = 2$ مستقيم مقارب أفقي يوازي (xx')

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = +\infty$

فإن : $x = -1$ مستقيم عمودي يوازي (yy')

2/ الإجابة بصح أو خطأ مع التبرير :

أ/ المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب لـ (C_f).

صحيح لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

ب/ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا .

خطأ لأن $f(x) > 2$ من أجل كل x من $R - \{-1\}$.

ج/ مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي $S =]-\infty;-1[$.

خطأ لأن مجموعة حلول المتراجحة .

$f(x) > 0$ هي : $S' =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$.

د/ على المجال $]-\infty\,;-1[$ يكون : $f(x) > f(-2)$

عندما يكون $x < -2$. صحيح لأن الدالة f متزايدة

تماما على المجال $]-\infty\,;-1[$.

هـ/ النقطة $A(-3;1)$ تنتمي إلى (C_f) .

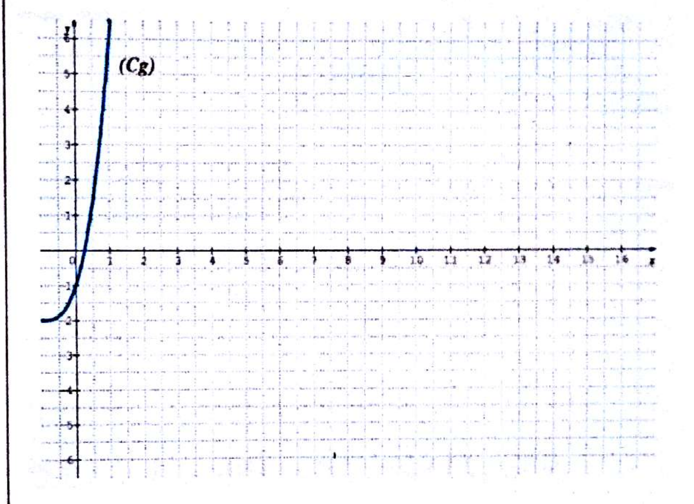
خطأ لأن القيمة الحدية الصغرى للدالة 2 و عليه فإنه مهما يكن x من D_f فإن : $f(x) > 2$ أي أن: $f(-3) \neq 1$.

و/ الدالة f زوجية. **خطأ لأن** : $f(1) \neq f(-1)$.

التمرين 02:

1/ المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$



أ/ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدد $g(0)$ و إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب/ علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

2/ f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يأتي :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$.

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، من المجال $]-1,+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$.

ب/ عين دون حساب : $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، و فسر النتيجة بيانيا.

ج/ أحسب $\lim_{x\to -1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ و فسر النتيجتين بيانيا.

د/ شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أنشئ (Γ) .
(بأخذ $\alpha \cong 0{,}26$)

حل التمرين 02 :

1) أ/ بقراءة بيانية تشكيل جدول تغيرات g :

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	-2 ↗ $+\infty$

تحديد $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$: $g(0)=-1$ و $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

ب/ تعليل وجود عدد حقيقي α من $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ حيث $g(\alpha)=0$:

لدينا g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ و $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ حيث :

ج/ تعيين إشارة $g(x)$:

$g(x) < 0$ من أجل $x \in]-1,\alpha[$

و $g(x) > 0$ من أجل $x \in]\alpha,+\infty[$ و $g(\alpha)=0$

2/ . أ/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي **x** من المجال $]-1,+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

لدينا الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$

و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ تعيين $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ دون حساب :

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=0$$

تفسير النتيجة : (Γ) يقبل مماس يوازي محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α .

ج/ حساب النهايتين :

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=+\infty$ لأن : $\begin{cases}x^3+3x^2+3x+2\to 1\\(x+1)^2\to 0^+\end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)\right]$$

$$=1\text{im}_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

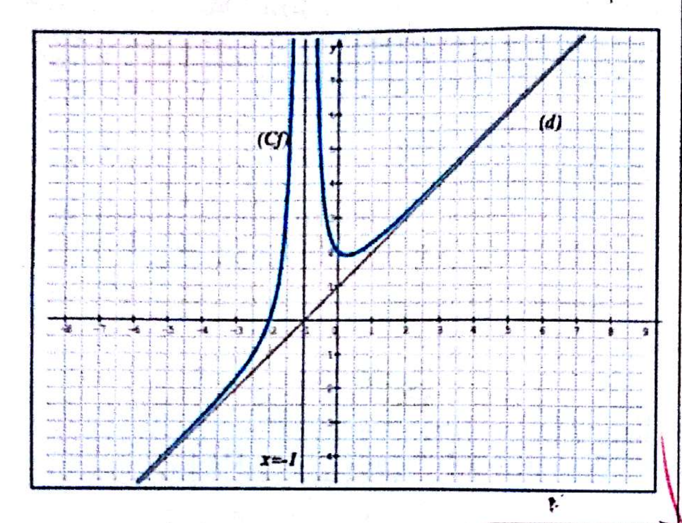
التفسير : (Γ) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-1$ و مستقيم مقارب مائل (d) معادلته $y=x+1$ عند $+\infty$.

د/ جدول تغيرات f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

بأخذ $\alpha\cong 0{,}26$ $f(\alpha)\cong 1{,}89$

رسم (Γ) :



التمرين 03 :

1) f دالة معرفة على IR بـ : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+5}{x^2+2x+10}$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) f دالة معرفة على $IR-\{2\}$ بـ : $f(x)=\frac{1-\sqrt{x^2+4}}{x-2}$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3) f دالة معرفة على IR بـ : $f(x)=5x+\sqrt{x^2+1}$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

4) f دالة معرفة على IR بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

حل التمرين 03 :

1) حالة عدم تعيين من الشكل $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$

(لإزالة حالة عدم التعيين نستعمل أكبر حد كعامل في البسط و المقام)

$$\lim f(x)=\lim\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+5}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}=\lim\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+5}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+5}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{5}{x}\right]}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+5}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{5}{x}\right]}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{5}{x}\right]}{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)} = 0$$

2) حالة عدم تعيين من الشكل $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-\infty}{+\infty}$

لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{-\infty}{+\infty}$ نستعمل أكبر حد كعامل مشترك في البسط و المقام.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right]}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}} = -1$$

(لأن $-1 \leftarrow$ البسط و $1 \leftarrow$ المقام)

حالة عدم التعيين من الشكل $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-\infty}{-\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}} = 1$$

3) $f(x) = 5x + \sqrt{x^2+1}$

(حالة عدم تعيين من الشكل $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + \infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 5x + \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 5x + |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 5x - x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left[5-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4}$

حالة عدم تعيين من الشكل $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - \infty$

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-(-x)\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left[-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x+\frac{4}{x^2}}\right]$$

$$=FI$$

(حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty\times 0$)

ملاحظة :

(طريقة العامل المشترك لا تنفعنا في هذا المثال ، نستعمل طريقة المرافق)

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}^2-\sqrt{x^2+4}^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2+4\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}=0$$

التمرين 04:

باستعمال قابلية الاشتقاق أحسب نهايات الدوال التالية عندما ينتهي المتغير x إلى العدد الحقيقي a .

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}$ $\quad a=1$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ $\quad a=0$

3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ $\quad a=0$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-2}}{x-1}$ $\quad a=\dfrac{\pi}{3}$

حل التمرين 04 :

1) نضع : $h(x)=\sqrt{x^2+3x}$ و $h(1)=2$ الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و $1\in]0,+\infty[$

و منه : $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$

حيث : $h'(x)=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$ و عليه : $h'(1)=\dfrac{5}{4}$

$$\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}=h'(1)=\frac{5}{4}$$

2) نضع : $h(x)=\sqrt{x+1}$ و $h(0)=1$ الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$ و $0\in]-1,+\infty[$

و منه : $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(0)$

حيث : $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ و عليه : $h'(0)=\dfrac{1}{2}$

و نلاحظ أن :

$$\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=h'(0)=\frac{1}{2}$$

3) نضع : $h(x)=\sin x$ و $h(0)=0$ الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال IR و $0\in IR$

و منه : $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(0)$

حيث : $h'(x)=\cos x$ و عليه : $h'(0)=1$

و نلاحظ أن : $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

4) نضع : $h(x)=\sqrt{2+2\cos x}$

و $h\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال IR

و $\frac{\pi}{3}\in IR$

و منه : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=h'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

حيث : $h'(x)=\frac{-2\sin x}{2\sqrt{2+2\cos x}}$

و عليه : $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

و نلاحظ أن :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}$$

التمرين 05:

لتكن f دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على R لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	2 ↗	$\frac{7}{2}$ ↘	$\frac{1}{2}$ ↗	2

تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل:

$f(x)=a+\frac{bx+c}{x^2+1}$ حيث a,b,c أعداد حقيقية ثابتة

1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a,b و c.

2) اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f عين:

أ- صورتي العددين $1-$ و 1 بالدالة f.

ب- $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا.

ج-إشارة $f(x)$ حسب قيم x.

د-عبارة الدالة $f(x)$.

3) نأخذ فيما يلي: $a=2$ ، $b=-3$ ، $c=0$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f.

أ-بين أن : $f'(x)=\frac{3x^2-3}{(x^2+1)^2}$.

ب-أدرس إشارة $f'(x)$.

ج-هل النتيجة تتوافق مع جدول تغيرات الدالة f ؟

د-عين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=2$

ثم أرسم (C_f) في معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

حل التمرين 05:

1) عبارة $f'(x)$:

من أجل كل x من R :

$$f'(x)=0+\frac{b(x^2+1)-2x(bx+c)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-bx^2-2cx+b}{(x^2+1)^2}$$

2) أ/ من خلال جدول التغيرات :

$f(1)=\frac{1}{2}$ و $f(-1)=\frac{7}{2}$.

ب/ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$

ومنه : (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=2$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

جـ/ إشارة $f(x)$:

من خلال جدول تغيرات f نستنتج :

قيم x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
إشارة $f(x)$	+

د/ عبارة الدالة f :

• $f(-1)=\frac{7}{2}$ أي $a+\frac{-b+c}{2}=\frac{7}{2}$

أي $2a-b+c=7$

• $f(1)=\frac{1}{2}$ أي $a+\frac{b+c}{2}=\frac{1}{2}$

أي $2a+b+c=1$

• $f'(-1)=0$ أي $-b+2c+b=0$ أي $c=0$.

بتعويض قيمة $c=0$ في المعادلات (1) و (2) نجد :

$\begin{cases}2a-b=7\\2a+b=1\end{cases}$ بالجمع نجد : $4a=8$ ومنه $a=2$.

بتعويض قيمة a في $2a+b=1$ نجد $b=-3$.

ومنه : $f(x)=2-\frac{3x}{x^2+1}$

3) أ/ لدينا : $f(x)=2-\frac{3x}{x^2+1}$

من أجل كل x من R :

$$f'(x)=0-\frac{3(x^2+1)-2x(3x)}{x^2+1}$$

$$=-\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^2-3}{(x^2+1)^2}$$

ب/ دراسة إشارة $f'(x)$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب .

قيم x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
إشارة $3x^2-3$		+	0	−	0	+	
إشارة $f'(x)$		+	0	−	0	+	

ج/ النتيجة تتوافق مع جدول تغيرات الدالة f .

لأن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3x}{x^2}\right)=2$

و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3x}{x^2}\right)=2$

و : $f(-1)=\frac{7}{2}$ ، $f(1)=\frac{1}{2}$

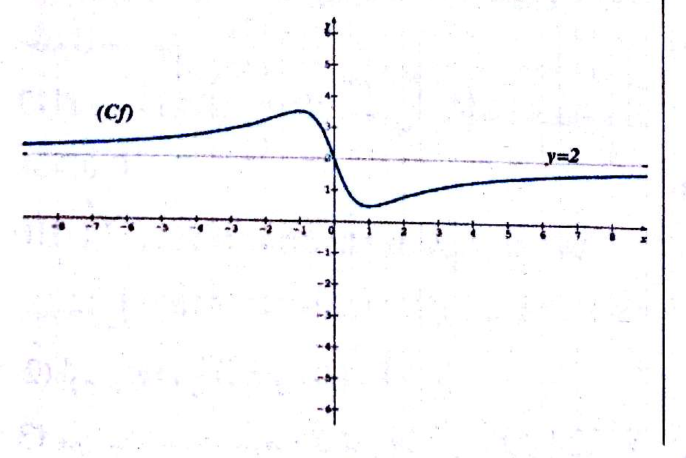
د) تعيين نقط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ) : $\begin{cases}y=f(x)\\y=2\end{cases}$

ومنه: $f(x)=2$ معناه : $2-\frac{3x}{x^2+1}=2$

أي : $-\frac{3x}{x^2+1}=0$ ومنه : $x=0$

معناه : $(C_f)\cap[y=2]=\{(0;2)\}$

•إنشاء (C_f)



التمرين 06:

f دالة عددية معرفة على $IR-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$$

و يرمز بـ (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) 1) عين الأعداد الحقيقية c,b,a بحيث يكون من أجل كل x من $IR-\{-1\}$ ؛ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$

2) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

3) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعيين معادلته.

4) أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

5) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

(II) 1) أثبت أنه من أجل كل x من $IR-\{1\}$: $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ هي الدالة المشتقة للدالة f.

2) عين اتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها و شكل جدول تغيراتها.

3) أكتب معادلة المماس (D) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(III) 1) أثبت أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

2) أرسم كلا من (Δ) و (D) و (C_f).

3) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان.

حل التمرين 06:

(I) 1) تعيين الأعداد الحقيقية c,b,a حيث:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

$$=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$=\frac{ax^2+bx+ax+b+c}{x+1}$$

$$=\frac{ax^2+(b+a)x+b+c}{x+1}$$

و عليه $\begin{cases}a=1\\ b+a=0 \quad ; \quad b=-1\\ b+c=3 \quad ; \quad c=4\end{cases}$

و منه: $f(x)=x-1+\frac{4}{x+1}$

2) حساب النهايات على أطراف مجموعة تعريف f:

$$D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=+\infty$

$\lim_{x \xrightarrow{>} -1}f(x)=+\infty$ (البسط $\to 4$ و المقام $\to 0^+$)

$\lim_{x \xrightarrow{<} -1}f(x)=-\infty$ (البسط $\to 4$ و المقام $\to 0^-$)

3) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب: لدينا: $\lim_{x\to-1}f(x)=\infty$

و عليه فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=-1$.

4) إثبات أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(f(x)-y\right)=\lim_{|x|\to+\infty} x-1-\frac{4}{x+1}-(x-1)$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x+1}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x}=0$$

و منه (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

5) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{4}{x+1}$$

قيم x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $x+1$		$-$	0	$+$	
إشارة $f(x)-y$		$-$	||	$+$	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)		تحت	||	فوق	

(II) 1) إثبات أنه من أجل كل x من $IR-\{1\}$:

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

لدينا f قابلة للاشتقاق على $IR-\{1\}$ و :

$$f'(x)=\frac{(2x)(x+1)-(1).(x^2+3)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

2) ندرس إشارة $f'(x)$:

قيم x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
إشارة $(x-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
إشارة $x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
إشارة $(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

و منه : f متزايدة لما $x\in\,]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$

و f متناقصة لما $x\in[-3;-1[\cup]-1;+1]$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

معادلة المماس (D) : $f'(0)=-3$ و $f(0)=3$

ومنه $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه: $y=-3x+3$

(III

1) إثبات أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

$A(-1;-2)$ مركز تناظر لـ (C_f) إذا تحقق ما يلي :

- من أجل كل $x\in D_f$ فإن $(2(-1)-x)\in D_f$
- $f(2(-1)-x)+f(x)=2(-2)$

لدينا من أجل كل $x\in D_f$: $x\in IR-\{-1\}$

أي : $x\neq-1$

فإن: $-x\neq 1$ ومنه : $-2-x\neq-1-2$

أي : $(-2-x)\in IR-\{1\}$

لدينا :

$$f(-2-x)+f(x)=\frac{(-2-x)^2+3}{-2-x+1}+\frac{x^2+3}{x+1}$$

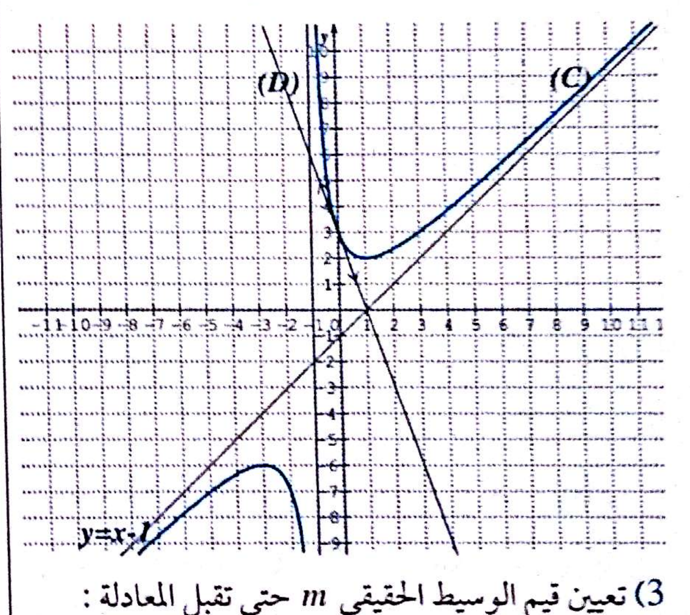
$$=\frac{4+4x+x^2+3}{-x-1}+\frac{x^2+3}{x+1}$$

$$=\frac{-4x-4}{x+1}$$

$$=\frac{-4(x+1)}{x+1}=-4$$

و منه $A(-1;-2)$ مركز تناظر لـ (C_f)

2) إنشاء كلا من (Δ) و (D) و (C_f) :

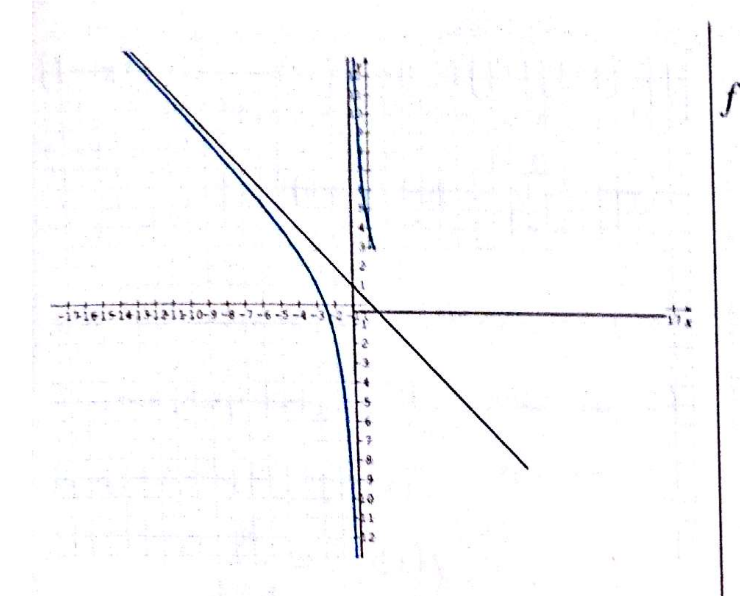


3) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $f(x)=m$ حلان مختلفان (بيانيا) :

حلول المعادلة $f(x)=m$ بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الموازي لمحور الفواصل الذي معادلته $y=m$ ومنه: تقبل المعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان لما: $m\in]-\infty;-6[\cup]2;+\infty[$.

التمرين 07:

❶ f دالة معرفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل .



1) أ/ أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I .

ب/ بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها .

2) g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

أ/ أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب/ تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلته .

جـ/ أدرس تغيرات g .

❷ k دالة معرفة على $R-\{-1\}$ كما يلي : $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{h\to 0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج :

ب/ أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

2) أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

3) أرسم (Δ_1) و (Δ_2) و (C_k) .

حل التمرين 07 :

❶ 1) أ/ $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$ معرفة على:

$]-\infty;-1[\cup]-1;0[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

و $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=4$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=-\infty$$

ب) جدول تغيرات الدالة f :

قيم x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4

2) g دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x+\frac{4}{x+1}$$

أ/ $$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

ب/ لدينا : $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right)=0$

ومنه : $y=x$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$.

جـ/ من أجل كل عدد حقيقي من المجال : $[0;+\infty[$

$$g'(x)=1+\frac{-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب .

جدول إشارة $g'(x)$:

قيم x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$+$		$+$	
إشارة: $g'(x)$		$-$		$+$	

جدول تغيرات g:

قيم x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	4	↘	3	↗	$+\infty$

❷ k دالة معرفة على $R-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$

1) أ/ حساب $\lim_{\substack{h\to 0\\>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\>}}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\>}}\frac{h^2-3h}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h\to 0\\>}}\frac{h(h-3)}{h(h+1)}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\>}}\frac{h-3}{h+1}=-3$$

حساب : $\lim_{\substack{h\to 0\\<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\<}}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\<}}\frac{-h^2-5h}{h(h+1)}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\<}}\frac{h(-h-5)}{h(h+1)}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\<}}\frac{-h-5}{h+1}=-5$$

بما أن : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{k(h)-k(0)}{h} \neq \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{k(h)-k(0)}{h}$

نستنتج أن الدالة k غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

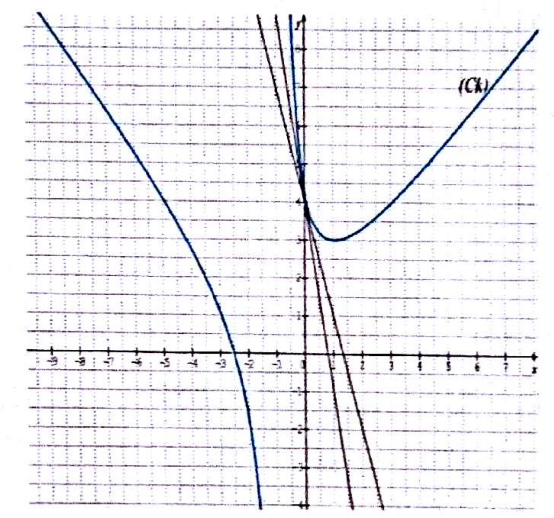
ب/ النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة زاوية و (C_k) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 0 ميلاهما $3-$ و$5-$.

2) معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها 0:

معادلة (Δ_1) : $y= k'(0)(x-0)+k(0)$ ومنه: $y=-3x+4$

معادلة (Δ_2) : $y= k'(0)(x-0)+k(0)$ ومنه: $y=-5x+4$

3) إنشاء (Δ_1) و (Δ_2) و (C_k) :



التمرين 08:

لتكن الدالة f المعرفة على $R-\{0\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^3+3x-1}{3x^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ و 0

ثم استنتج أن (C_f) يقبل مقاربين أحدهما مائل معادلته.

$$y=\frac{1}{3}x$$

2) أثبت أنه من أجل كل x من D_f فإن :

$f'(x)=\frac{(x+2)(x-1)^2}{3x^3}$ ، ثم أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{3}$.

4) أنشئ (C_f) في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

5) لتكن الدالة g حيث : $g(x)=|f(x)|$

أ/ أكتب عبارة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .

ب/ كيف يتم رسم المنحنى (Cg) الممثل للدالة g باستعمال المنحنى (Cf) ؟ علل ثم أنشئ (Cg).

6) لتكن الدالة h حيث : $h(x)=f(|x|)$

أ/ بين أن h دالة زوجية .

ب/ كيف يتم رسم المنحنى (Ch) الممثل للدالة h باستعمال المنحنى (Cf) ؟ علل ثم أنشئ (Ch) .

حل التمرين 08 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{3}=-\infty$

$\left(\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x)=-\infty\right)$ $\quad x^3+3x-1\to-1$ ، $3x^2\to 0^+$

و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و عليه فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=0$.

إثبات أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=\frac{1}{3}x$ مستقيم مقارب مائل :

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x)-y)$

$=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x^3+3x-1}{3x^2}-\frac{1}{3}x=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{3x-1}{3x^2}=0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ):

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{3x-1}{3x^2}$$

قيم x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
إشارة $3x-1$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
إشارة $f(x)-y$		$-$	‖	$-$		$+$	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)		تحت	‖	تحت		فوق	

2) من أجل كل x من D_f :

$$f'(x)=\frac{(3x^2+3)(3x^2)-(6x)(x^3+3x-1)}{(3x^2)^2}$$

$$=\frac{9x^4+9x^2-6x^4-18x^2+6x}{9x^4}$$

$$=\frac{3x^4-9x^2+6x}{9x^4}$$

$$=\frac{x^3-3x+2}{3x^3}=\frac{(x+2)(x-1)^2}{3x^3}$$

ندرس إشارة $f'(x)$:

قيم x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
إشارة $(x-1)^2$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
إشارة $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
إشارة $3x^3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	

ومنه : f متزايدة على المجالات $]-\infty;-2]$ ، $[0;+\infty[$

و متناقصة لما $x\in[-2;0[$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↗	$-\frac{5}{4}$

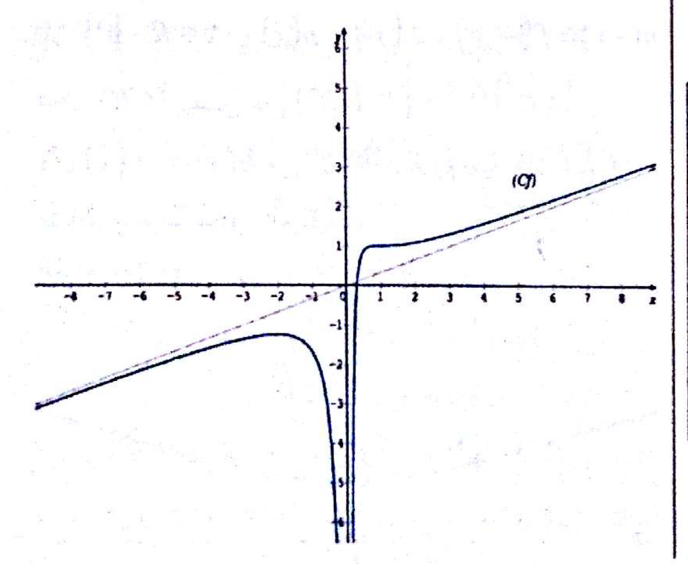
3) لدينا f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)\times f\left(\frac{1}{3}\right)<0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من $\left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$ حيث : $f(\alpha)=0$.

أي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{3}$.

4) إنشاء (C_f):



5) لتكن الدالة g حيث : $g(x)=|f(x)|$

أ/ كتابة عبارة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

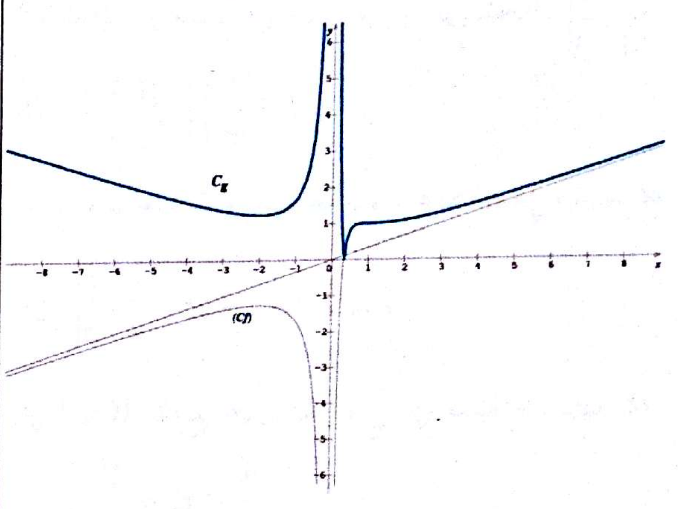
$g(x)=f(x)$ إذا كان $f(x)\geq 0$ أي $x\in[\alpha;+\infty[$

و $g(x)=-f(x)$ إذا كان $f(x)\leq 0$

أي $x\in]-\infty;0[\cup]0;\alpha]$.

ب/ (Cg) ينطبق على (Cf) لما $x\in[\alpha;+\infty[$

(Cg) هو نظير (Cf) بالنسبة لمحور الفواصل لما $x\in]-\infty;0[\cup]0;\alpha]$ إنشاء (Cg):



6) لتكن الدالة h حيث : $h(x)=f(|x|)$

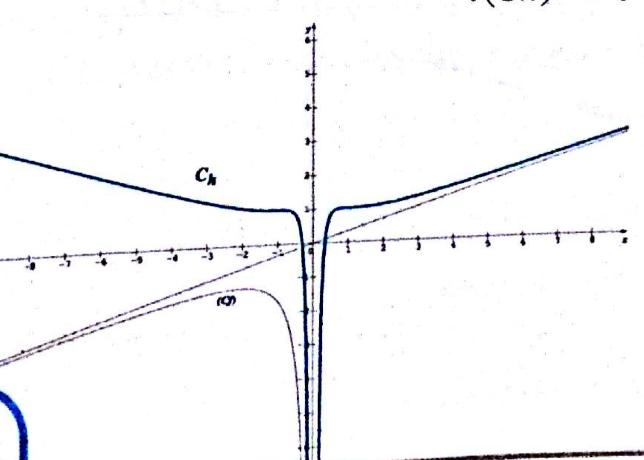
أ/ إثبات أن h دالة زوجية : من أجل كل x من $R-\{0\}$

فإن: $-x\in R-\{0\}$ و $h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$

ب/ (Ch) ينطبق على (Cf) لما $x\in]0;+\infty[$

لأن $h(x)=f(x)$ وبما أن h دالة زوجية فإن (Ch) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

إنشاء (Ch):



التمرين 09:

f دالة معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .

2) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]1;2[$

حل التمرين 09 :

1) دراسة التغيرات: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}=-\infty$

f مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]1;+\infty[$ إذن: f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$

حيث: $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=-1\times\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

إذن: من أجل كل من x من $]1;+\infty[$: $f'(x)<0$

ومنه: f متناقصة على المجال $]1;+\infty[$

جدول التغيرات:

قيم x	1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

2) f مستمرة على $]1;2]$ و متناقصة تماما على $]1;2]$

و $f(2)=\dfrac{1}{2-1}-\sqrt{2}=1-\sqrt{2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$

أي : $f(2)\times\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)<0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1;2[$ يحقق $f(\alpha)=0$

التمرين 10 :

f دالة معرفة على المجموعة D_f بـ :

$D_f =]-\infty;-4] \cup [0;+\infty[$ مع $f(x) = x+1+\sqrt{x^2+4x}$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=2x+3$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

3) هل f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟ -4 ؟

4) أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in D_f - \{0;-4\}$.

5) انشئ جدول تغيرات الدالة f ثم للمنحنى (C).

حل التمرين 10 :

1) ح ع ت من الشكل :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+1+\sqrt{x^2+4x} = -\infty+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x+1\sqrt{x^2+4x}\right)\times\frac{x+1-\sqrt{x^2+4x}}{x+1-\sqrt{x^2+4x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-1-x^2-4x}{x+1-\sqrt{x^2+4x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{x+1-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right)}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+1+\sqrt{x^2+4x} = +\infty$$

2) $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x+1+\sqrt{x^2+4x}-2x-3$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}-(x+2)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right]\times\frac{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-(x^2+4x+4)}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}=0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

3) لا يمكن لـ f أن تكون قابلة للاشتقاق عند 0 لأنها ليست معرفة على يسار 0.

لا يمكن لـ f أن تكون قابلة للاشتقاق عند -4 لأنها ليست معرفة على يمين -4

4) من أجل $x \in D_f - \{0;-4\}$:

$$f'(x)=1+\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}=1+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$$

5) إشارة $f'(x)$: على المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $0<x+2$

إذن: $1+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\rangle 0$ أي $f'(x)\rangle 0$

على المجال $]-\infty,-4[$ لدينا: $f'(x)\geq 0$

$$1+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\geq 0 \Leftrightarrow 1\geq -\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1\geq\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)^2 \Leftrightarrow 1\geq\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x}$$

لأن الطرفين موجبين لما $x\in]-\infty,-4[$

$$\Leftrightarrow x^2+4x\geq x^2+4x+4$$

$\Leftrightarrow 0\geq 4$ مستحيل.

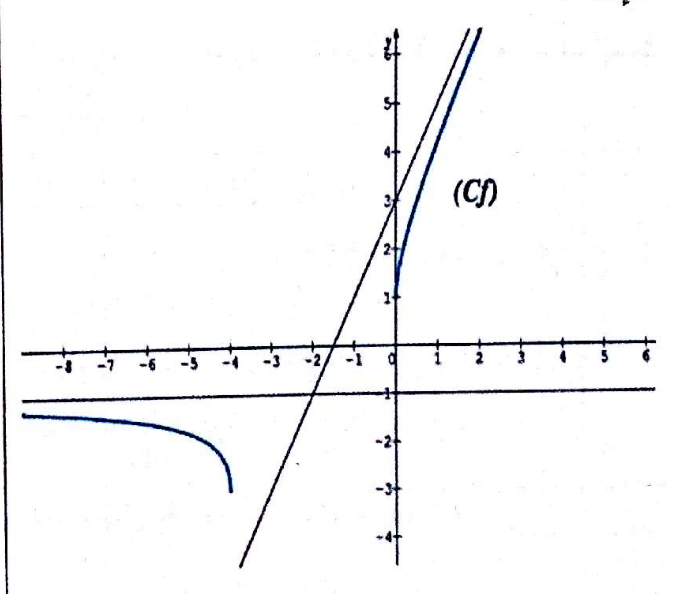
إذن على المجال $]-\infty,-4[$ لا يمكن أن يكون $f'(x)\geq 0$

أي $f'(x)\langle 0$.

منه جدول تغيرات الدالة f :

قيم x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	//////	$+$	
$f(x)$	$-1 \searrow -3$	//////	$1 \nearrow +\infty$	

الإنشاء:



التمرين 11:

f دالة معرفة على $]0;1[$ بـ: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$ نسمي (C) منحاها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) هل الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0؟

2) أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة $1/2$

4) أرسم في نفس المعلم كل من (T) و (C) .

حل التمرين 11 :

1) الدالة f ليست معرفة على يسار 0 إذن: f ليست قابلة للاشتقاق عند 0 .

2) f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;1[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\left(\frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

$$=\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}\times\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{x^2(3-2x)}{2x(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

لأن $x\rangle 0$ إذن $\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}$ ومنه: $f'(x)=\dfrac{x(3-2x)}{2(1-x)^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

إذن إشارة $f'(x)$ على $]0;1[$ هي إشارة $3-2x$ لأن: $x\rangle 0$ و $(1-x)^2\rangle 0$ و $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\rangle 0$ منه جدول إشارة $f'(x)$:

قيم x	0 1
إشارة $f'(x)$	$+$

منه جدول تغيرات الدالة f على $]0;1[$: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

قيم x	0 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

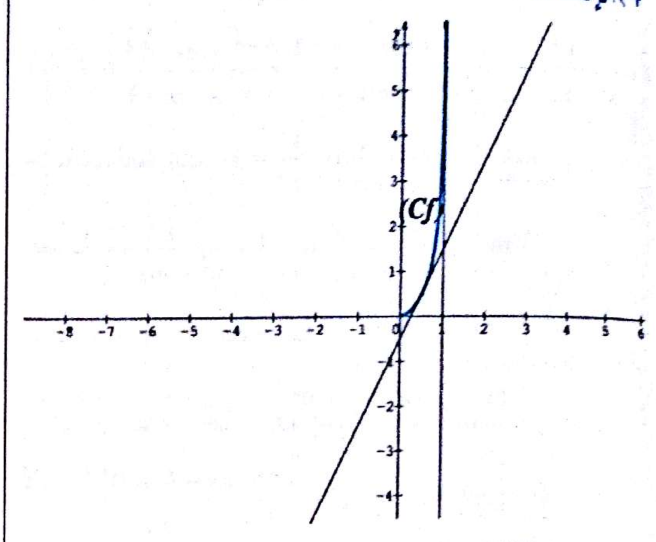
3) معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $1/2$ تكتب من الشكل $y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}(3-1)}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1/2}}=\frac{1}{2(1/4)}\sqrt{1}=2$$

و $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1/8}{1/2}}=\sqrt{1/4}=1/2$

منه معادلة (T): $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ أي: $y=2x-\frac{1}{2}$

4) الإنشاء:



التمرين 12:

❶ نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) عين D_f ثم أحسب النهايات على أطراف مجموعة التعريف المفتوحة واستنتج معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

2) أدرس تغيرات الدالة f وأنشئ جدول تغيراتها.

3) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 5.

4) أثبت أن المستقيم $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

❷ نعتبر الدالة $f_m(x)=\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$ حيث (m وسيط حقيقي) ونرمز لـ (C_m) إلى المنحنى الممثل للدالة f_m.

1) أوجد D_{f_m} مجموعة تعريف الدالة f_m.

2) تحقق أنه من أجل كل $x\in D_{f_m}$: $f(x)=1-\frac{12}{x^2-mx-3}$ ثم أحسب النهايات للدالة f على الأطراف المفتوحة لـ D_{f_m}

3) أدرس تغيرات الدالة f_m.

4) بين أنه توجد نقطة ثابتة تنتمي لكل المنحنيات (C_m).

5) ماهو المنحنى (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيات $(4;1)$.

6) أنشئ (C_f).

حل التمرين 12:

1) تعين مجموعة تعريف f: f معرفة إذا كان:

$x^2-2x-3\neq 0$ وعليه: $x_1=-1$ و $x_2=3$

ومنه: $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$

حساب النهايات: $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل معادلته $y=1$

$\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=-\infty$ $(x^2-2x-3\to 0^+;\ x^2-2x-15\to -12)$

$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=+\infty$ $(x^2-2x-3\to 0^-;x^2-2x-15\to -12)$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل معادلته $x=-1$

$\lim_{x\overset{<}{\to}3} f(x)=+\infty$

$(x^2-2x-3\to 0^-\ ;\ x^2-2x-15\to -12)$

و $\lim_{x\overset{>}{\to}3} f(x)=-\infty$

$(x^2-2x-3\to 0^+\ ;\ x^2-2x-15\to -12)$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل معادلته $x=3$

2) دراسة تغيرات f: عبارة $f'(x)$: من أجل كل $x\in D_f$:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x-15)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$=\frac{(2x-2)(x^2-2x-3-x^2+2x+15)}{(x^2-2x-3)^2}=\frac{24(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$:

قيم x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	

وعليه f متزايدة على المجالات $[1;3[$ و $]3;+\infty[$

و f متناقصة على المجالات $]-\infty;-1[$ و $]-1;1]$.

جدول تغيرات f :

قيم x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

3) معادلة المماس (Δ) :

$y=f'(5)(x-5)+f(5)$ $f'(5)=\frac{2}{3}$ و $f(5)=0$

$y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$ هي معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 5 .

4) إثبات أن المستقيم $x=1$ محور تناظر لـ (C_f) :

ليكن $x\in D_f$ فإن $2-x\in D_f$.

ولدينا : $f(2-x)=\frac{(2-x)^2-2(2-x)-15}{(2-x)^2-2(2-x)-3}$

$=\frac{4-4x+x^2-4+2x-15}{4-4x+x^2-4+2x-3}$

$=\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}=f(x)$

ومنه: فالمستقيم الذي معادلته $x=1$ محور تناظر لـ (C_f) .

❷ 1) f_m معرفة إذا كان: $x^2-mx-3\neq 0$ ، $\Delta=m^2+12>0$

ومنه : $x_2=\frac{m+\sqrt{m^2+2}}{2}$ ، $x_1=\frac{m-\sqrt{m^2+12}}{2}$

$D_{f_m}=]-\infty;x_1[\cup]x_1;x_2[\cup]x_2;+\infty[$

2) التحقق أن $f_m(x)=1-\frac{12}{x^2-mx-3}$

$$1-\frac{12}{x^2-mx-3}=\frac{x^2-mx-3-12}{x^2-mx-3}=\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}=f_m(x)$$

حساب النهايات : $\lim_{|x|\to+\infty} f_m(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}x_1} f_m(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}x_1} 1-\frac{12}{x^2-mx-3}=-\infty$$

لأن : $(x^2-mx-3\to 0^-)$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}x_1} f_m(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}x_1} 1-\frac{12}{x^2-mx-3}=+\infty$$

لأن : $(x^2-mx-3\to 0^+)$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}x_2} f_m(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}x_2} 1-\frac{12}{x^2-mx-3}=+\infty$$

لأن : $(x^2-mx-3\to 0^-)$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}x_2} f_m(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}x_2} 1-\frac{12}{x^2-mx-3}=+\infty$$

لأن : $(x^2-mx-3\to 0^+)$

3) دراسة تغيرات f_m :

$$f_m'(x)=\left(1-\frac{12}{x^2-mx-3}\right)'=12\cdot\frac{2x-m}{(x^2-mx-3)^2}$$

إشارة f'_m :

قيم x	$-\infty$		x_1		$\frac{m}{2}$		x_2		$+\infty$
إشارة $f'_m(x)$		-	||	-	0	+	||	+	

وعليه f_m متزايدة على المجالات $\left[\frac{m}{2};x_2\right[$ و $\left]\frac{x}{2};+\infty\right[$.

و f متناقصة على المجالات $]-\infty;x_1[$ و $\left]x_1;\frac{m}{2}\right]$.

جدول تغيرات f_m :

قيم x	$-\infty$		x_1		$\frac{m}{2}$		x_2		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f_m(x)$	1 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘	$f_m\left(\frac{m}{2}\right)$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

4) إثبات وجود نقطة ثابتة تنتمي لكل المنحنيات (C_m) لتكن

$M_0(x_0;y_0)$ من (C_m) $\quad y_0=\dfrac{x_0^2-mx_0-15}{x_0^2-mx_0-3}$

$$y_0x_0^2-my_0x_0-3y_0=x_0^2-mx_0-15$$

(من أجل كل $m\in R$ $\quad m(-y_0x_0+x_0)+y_0x_0^2-3y_0-x_0^2+15=0$

فإن : $\begin{cases}-y_0x_0+x_0=0......(1)\\ y_0x_0^2-3y_0-x_0^2+15=0........(2)\end{cases}$

من (1) : $x_0(-y_0+1)=0$ ومنه $x_0=0$ أو $y_0=1$

نعوض $x_0=0$ في المعادلة (2) نجد : $y_0=5$ ونعوض $y_0=1$ في المعادلة (2) نجد: $x_0^2-x_0^2+12=0$

لاتقبل(حلول) .ومنه : $M_0(0;5)$

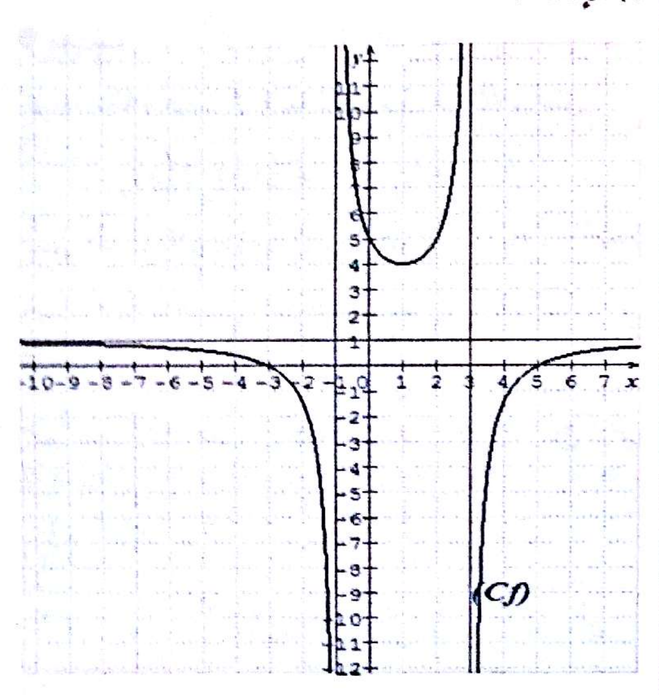
5) تعيين m بحيث النقطة $A(4;1)$ تنتمي للمنحنى (C_m)

$4=\dfrac{(1)^2-m(1)-15}{(1)^2-m(1)-3}$ أي: $4=\dfrac{-m-14}{-m-2}$

ومنه $-4m-8=-m-14$ ومنه $-3m=-6$ ومنه $m=2$

فالمنحنى الذي يشمل النقطة $A(4;1)$ هو المنحنى (C_2).

6) الإنشاء :



الــــدوال الأسيــة واللــوغاريتمية

*الدالة الأسية النيبيرية ذات الأساس e :

■ تعريف :

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على R وتحقق

$$f(0)=1 \quad \text{و} \quad f'(x)=f(x)$$

تسمى الدالة الآسية ذات الأساس e ونرمز لها بالرمز: $x \mapsto e^x$

حيث e عدد حقيقي ثابت قيمته التقريبية : $e \approx 2,718$

■ خواص :

من أجل كل عددين حقيقيين x و y و n عدد صحيح كيفي:

1) $e^{x+y}=e^x \times e^y$ ، 2) $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ ،

3) $\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$ ، 4) $(e^x)^n=e^{n.x}$ ، 5) $e^0=1$ ،

6) $e^1=e$

■ إشارة و اتجاه تغير الدالة الآسية :

1) الدالة الآسية ذات الأساس e موجبة تماما على R

2) من أجل كل x من R فإن: $f'(x)=f(x)$

أي : $(e^x)'=e^x$ ومنه الدالة الآسية ذات الأساس e متزايدة تماما على R .

ولدينا : من أجل كل عددين حقيقيين x و y من R .

- إذا كان : $e^x=e^y$ يعني : $x=y$
- إذا كان : $e^x>e^y$ يعني : $x>y$
- إذا كان : $e^x>1$ يعني : $x>0$
- إذا كان : $0<e^x<1$ يعني : $x<0$

■ النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

و $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

تمرين تطبيقي

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=e^{2x}-e^x$

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) تحقق أن:

$f(x)=e^{2x}(1-e^{-x})$ ثم إستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

الحل:

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}-e^x=0$

لأن: $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

2) لدينا: $f(x)=e^{2x}-e^{2x}.e^{-x}=e^{2x}(1-e^{-x})$

إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{2x}(1-e^{-x})=+\infty$

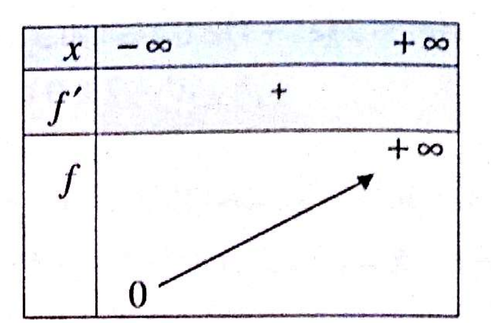
لأن: $(\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0)$

■ التزايد المقارن :

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ بشكل عام لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ حيث $(n\in N^*)$
- $\lim_{x\to-\infty} x.e^x=0$ بشكل عام لدينا : $\lim_{x\to-\infty} x^n.e^x=0$ حيث $(n\in N^*)$

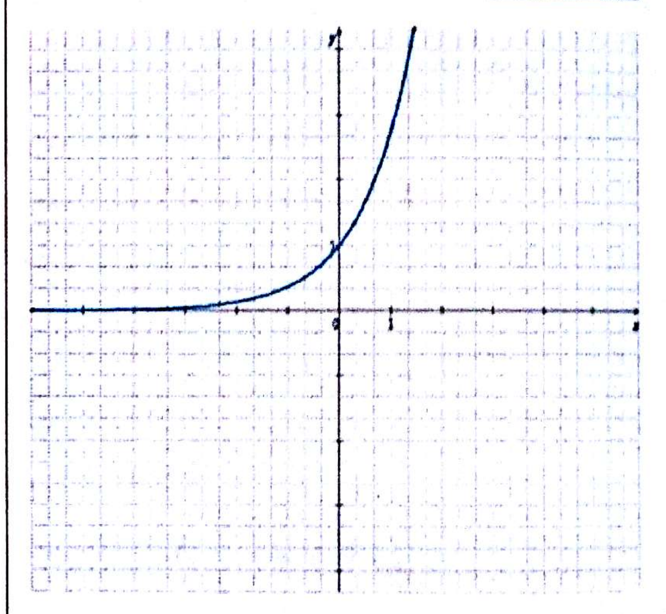
■ التمثيل البياني للدالة : $f(x)=e^x$ المعرفة على R

جدول التغيرات :



x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
f'	+
f	$0 \nearrow +\infty$

<u>الإنشاء البياني :</u>



■ دراسة الدالــة : $x \mapsto e^{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من R

فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ومن أجل كل عدد حقيقي من I فإن :

$$\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}$$

<u>أمثلة :</u>

1) $f(x)=e^{x^2-3x+1} \rightarrow f'(x)=(2x-3).e^{x^2-3x+1}$ على R

2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}} \longrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ على R^*

مثال تطبيقي:

دراسة تغيرات الدالة : $f(x)=x.e^{-x}$ على المجال R

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$

$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right)$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+\right)$

عبارة $f'(x)$ و إشارتها :

من أجل كل $x\in R$: $f'(x)=\frac{1.e^x-e^x.x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x(1-x)}{\left(e^x\right)^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة العبارة : $1-x$ (لأن : $e^x \succ 0$)

جدول تغيرات f :

قيم x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
f	$0 \nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow 0$

■ حل المعادلات من الشكل : $(e^x=a)$ حيث a عدد حقيقي ثابت .

1) $e^x=a$: $a\le 0$ (مستحيلة)

2) $e^x=a$: $a>0$ معناه $x=\ln a$

تمرين تطبيقي:

حل في R المعادلات التالية:

1) $2e^x+6=0$ ، 2) $e^{x-1}-1=0$ ،

3) $(e^{x-1}-e^{2x}=0)$ ، 4) $e^{2x}-2e^x+1=0$

الحل:

1) $2e^x+6=0$ ومنه $e^x=-3$ مستحيل لأن e^x دوما موجب وعليه مجموعة حلول المعادلة هي مجموعة خالية .

2) $e^{x-1}-1=0$ ومنه $e^{x-1}=1$ ومنه $e^{x-1}=e^0$

ومنه $x-1=0$ أي $x=1$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{1\}$.

3) $e^{x-1}-e^{2x}=0$ ومنه $e^{x-1}=e^{2x}$

ومنه $x-1=2x$ ومنه $x-2x=1$ ومنه $-x=1$

أي: $x=-1$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{-1\}$.

4) $e^{2x}-2e^x+1=0$

$(e^x)^2-2\times1\times e^x+(1)^2=0$

ومنه: $(e^x-1)^2=0$ وعليه فإن: $e^x-1=0$

ومنه $e^x=1$ ومنه: $e^x=e^0$ وعليه: $x=0$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{0\}$.

تمرين تطبيقي:

حل في R المتراجحات التالية:

1) $e^{x-1}-e^{-2x+3}\geq0$

2) $(e^x-2)(e^x+1)\geq0$

3) $e^{2x}-5e^x+6<0$

الحل:

1) $e^{x-1}-e^{-2x+3}\geq0$ ومنه $e^{x-1}\geq e^{-2x+3}$

ومنه $x-1\geq-2x+3$ ومنه $x+2x\geq1+3$

أي $x\geq\frac{4}{3}$ $3x\geq4$

وعليه مجموعة حلول المتراجحة : $S=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

2) $(e^x-2)(e^x+1)\geq0$ بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x

فإن: $e^x+1>0$

ومنه حلول المتراجحة $(e^x-2)(e^x+1)\geq0$ هي حلول المتراجحة $e^x-2\geq0$

ومنه $e^x\geq2$ ومنه $e^x\geq e^{\ln2}$ ومنه $x\geq\ln2$

وعليه مجموعة حلول المتراجحة : $S=[\ln2;+\infty[$

3) $e^{2x}-5e^x+6<0$ (بوضع: $X=e^x$ حيث $X>0$)

فإن : $X^2-5.X+6<0$

$\Delta=(-5)^2-4\times1\times(6)=1$

ومنه: $X_1=\frac{5+1}{2}=3$ و $X_2=\frac{5-1}{2}=2$

ومنه : $e^x=3$ أي $x=\ln3$ أو $e^x=2$ أي $x=\ln2$

جدول إشارة العبارة $X^2-5.X+6$:

قيم x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
إشارة $X^2-5.X+6$		+	0	-	0	+	

وبما أن : $X>0$

قيم x	0		2		3		$+\infty$
إشارة $X^2-5.X+6$		+	0	-	0	+	

وعليه تكون إشارة العبارة : $e^{2x}-5e^x+6$

قيم e^x	0		2		3		$+\infty$
إشارة $e^{2x}-5e^x+6$		+	0	-	0	+	

ومنه :

قيم x	$+\infty$		$\ln2$		$\ln3$		$-\infty$
إشارة $e^{2x}-5e^x+6$		+	0	-	0	+	

وعليه تكون حلول المتراجحة: $S=]\ln2;\ln3[$

*الدالة الأسية ذات الأساس a حيث $a \in R_+^* - \{1\}$

■ **تعريف** : لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$a^x = e^{x.\ln a}$$

■ **خواص** : من أجل كل عددين حقيقيين x و y من R

1) $a^{x+y} = a^x \times a^y$ ، 2) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

3) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ، 4) $\left(a^x\right)^n = a^{n.x}$

5) $a^0 = 1$

■ **النهايات** :

$a \succ 1$	$0 \prec a \prec 1$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

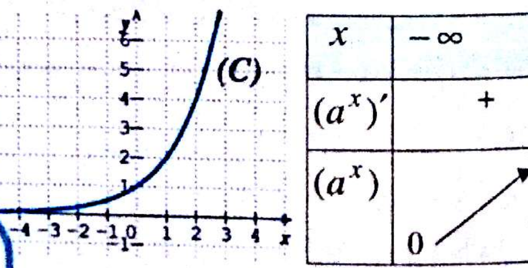
■ **المشتقة** : $\left(a^x\right)' = (\ln a) \times a^x$

■ **التمثيل البياني للدالة** : $f(x) = a^x$ المعرفة على R

حالة : $a \succ 1$	حالة : $0 \prec a \prec 1$
$\left(a^x\right)' = (\ln a) \times a^x \succ 0$	$\left(a^x\right)' = (\ln a) \times a^x \prec 0$

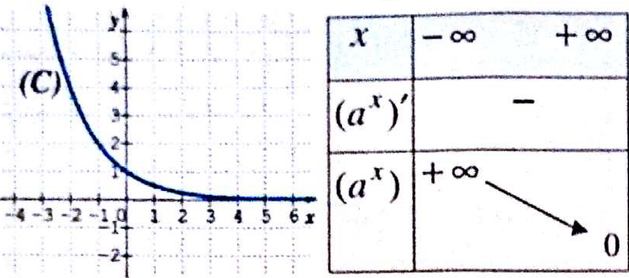
إنشاء (C) (مثلا : $a = 2$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	+	
(a^x)	0 ↗	$+\infty$



إنشاء (C) (مثلا : $a = \dfrac{1}{2}$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	−	
(a^x)	$+\infty$ ↘	0



*الدالة اللوغاريتمية النيبرية ذات الأساس e :

■ **اللوغاريتم النيبيري لعدد a** :

تعريف: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$.

يسمي هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نرمز إليه بالرمز" $\ln a$ ".

مثال: العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b = 3$ هو العدد $\ln 3$.

■ **تعريف الدالة " ln "**:

نسمي" الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" الدالة التي نرمز إليها بالرمز" ln" و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

■ **خواص**:

خاصية 1 : إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان تماما .

$\ln x > \ln y$ يعني أن $x > y$

$\ln x = \ln y$ يعني أن $x = y$

$\ln x < \ln y$ يعني أن $x \prec y$

مثال تطبيقي:

1) حل في R المعادلة: $\ln(2x-3) = \ln(x+4)$

تكون المعادلة معرفة إذا كان: $x+4 \succ 0$ و $2x-3 \succ 0$

أي : $x > -4$ ومنه : $x \in]-4;+\infty[$

و $x > \dfrac{3}{2}$ ومنه : $x \in \left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

ومنه : $x \in \left]-4;+\infty\right[\cap \left]\frac{3}{2};+\infty\right[= \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

ولدينا : $\ln(2x-3) = \ln(x+4)$

ومنه: $2x-3 = x+4$

أي : $x = 7 \in \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ ومنه : $S = \{7\}$

2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\ln(x-1) > \ln(x)$

تكون المتراجحة معرفة إذا كان: $x \succ 1$ و $x \succ 0$

يعني $x \in \left]1;+\infty\right[$

لدينا $\ln(x-1) \succ \ln(x)$ يعني أن $x \prec x-1$

يعني أن $2x \succ 1$ يعني $x \succ \frac{1}{2}$.

و لدينا تقاطع المجالين $\left]1;+\infty\right[$ و $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

هو المجال $\left]1;+\infty\right[$ إذن حل المتراجحة هو المجال $\left]1;+\infty\right[$.

خاصية 2 :

إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان تماما .

$$\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln(x^r) = r \ln x \qquad r \in Q$$

النهايات : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

التزايد المقارن : n عدد طبيعي غير معدوم

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

و $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$ و $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

و $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

المشتقة :

1) من أجل كل x من $\left]0;+\infty\right[$ فإن : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

ومنه الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على $\left]0;+\infty\right[$

2) u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال لكل عدد x من I لدينا $\left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

جدول تغيرات الدالة " $\ln x$ " :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln'(x)$	$+$
$\ln x$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

*** الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ذات الأساس a**

تعريف : ليكن $a \succ 0$ و $a \neq 1$

الدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ المعرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ ،

تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a و نرمز لها بالرمز $\log_a$

$\log_a : \left]0;+\infty\right[\to R$

و لدينا : $x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

ملاحظة : لدينا : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$:

$\log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$.

دالة اللوغاريتم النيبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e .

خواص: ليكن $a \succ 0$ و $a \neq 1$

1- لكل x و y من $\left]0;+\infty\right[$ و لكل $n \in N$ ، لدينا :

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(x^n) = n\log_a(x)$

$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

2- لكل $r \in Q$ و لكل $x \in]0;+\infty[$ لدينا :

$$\log_a(x^r) = r\log_a(x)$$

3- رتابة الدالة $\log_a$:

أ- مجموعة تعريف الدالة $\log_a$ هي : $D_{\log_a} =]0;+\infty[$

ب- النهايات : نعلم أنه مهما يكن x من $]0;+\infty[$ إذن :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

* إذا كان $a \succ 1$: فإن : $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$

* إذا كان $0 \prec a \prec 1$: فإن : $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$

ج- جدول التغيرات : لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[$:

$$\log_a{}'(x) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$$

أ- حالة $a \succ 1$: لدينا $\log_a$ متزايدة تماما على المجال

$$]0;+\infty[$$

x	0 $+\infty$
$\log_a{}'(x)$	$+$
$\log_a(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

ب- حالة $0 < a < 1$:

لدينا $\log_a$ متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

x	0 $+\infty$
$\log_a{}'(x)$	$-$
$\log_a(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

■ دالة اللوغاريتم العشري :

1/ تعريف :

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و نرمز لها بالرمز log (عوض $\log_{10}$) ، و

$$\log :]0;+\infty[\to R$$

لدينا : $x \mapsto \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

2/ ملاحظة :

أ- $\log 10 = 1$ ، $\log 1 = 0$

ب- $\log(10^r) = r\log 10$ ، $\forall r \in Q$

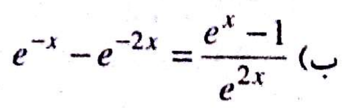
ج- $\log x = \log y$ يعني أن $x = y$ ، $\forall (x;y) \in (]0;+\infty[)^2$

تمارين

التمرين 01:

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x مايلي:

أ) $(e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x}}$



ب) $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$

ج) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

2 عين العددين الحقيقيين a و b في كل حالة:

أ) $\frac{e^x-2}{e^x+1}=a+\frac{b}{e^x+1}$

ب) $\frac{e^{2x}-3e^x+5}{e^x+2}=e^x+a+\frac{b}{e^x+2}$

حل التمرين 01:

1 أ) إثبات أن: $(e^x+e^{-x})^2=\frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{e^{2x}}$

$$(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}=e^{2x}+$$

$$2e^{x-x}+e^{-2x}=e^{2x}+2+\frac{1}{e^{2x}}=\frac{e^{2x}e^{2x}+2e^{2x}+1}{e^{2x}}$$

$$=\frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{e^{2x}}$$

ب) إثبات أن: $e^{-x}-e^{-2x}=\frac{e^x-1}{e^{2x}}$

$$e^{-x}-e^{-2x}=\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{2x}}=\frac{e^x}{e^xe^x}-\frac{1}{e^{2x}}$$

$$=\frac{e^x}{e^{2x}}-\frac{1}{e^{2x}}=\frac{e^x-1}{e^{2x}}$$

جـ) إثبات أن: $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}$$

$$=\frac{e^{2x}-1}{e^x}\cdot\frac{e^x}{e^{2x}+1}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

2 أ) تعين a و b حيث: $\frac{e^x-2}{e^x+1}=a+\frac{b}{e^x+1}$

$$a+\frac{b}{e^x+1}=\frac{ae^x+a+b}{e^x+1}=\frac{e^x-2}{e^x+1}$$

وعليه فإن: $\begin{cases}a=1\\ a+b=-2\ ;\ 1+b=-2\ ;\ b=-3\end{cases}$

ومنه: $\frac{e^x-2}{e^x+1}=1-\frac{3}{e^x+1}$

ب) تعين a و b حيث:

$$\frac{e^{2x}-3e^x+5}{e^x+2}=e^x+a+\frac{b}{e^x+2}$$

$$e^x+a+\frac{b}{e^x+2}=\frac{e^x(e^x+2)+a(e^x+2)+b}{e^x+2}$$

$$=\frac{e^{2x}+2e^x+ae^x+2a+b}{e^x+2}$$

$$=\frac{e^{2x}+(2+a)e^x+2a+b}{e^x+2}$$

$$=\frac{e^{2x}-3e^x+5}{e^x+2}$$

وعليه فإن: $\begin{cases}(2+a)=-3;a=-5\\ 2a+b=5\end{cases}$

ومنه: $-10+b=5$ أي: $b=15$

ومنه: $\frac{e^{2x}-3e^x+5}{e^x+2}=e^x-5+\frac{15}{e^x+2}$

التمرين 02:

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ للمتغير الحقيقي x حيث:

$$P(x)=2x^3-5x^2+x+2$$

1) أحسب $P(2)$ ثم تحقق من أن:

$$P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$$

حيث a,b,c أعداد حقيقية يطلب تعينها.

2) حل في R المعادلة: $P(x)=0$

3) استنتج الحلول في R للمعادلة:

$$2e^{3x}-5e^{2x}+e^x+2=0$$

حل التمرين 02:

$P(x)=2x^3-5x^2+x+2$

1) حساب $P(2)$:

$$P(2)=2(2)^3-5(2)^2+2+2=0$$

• تعيين الأعداد الحقيقية a,b,c:

$$P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$$
$$=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$$
$$=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c.$$

بالمطابقة نجد:
$$\begin{cases} a=2 \\ b-2a=-5;b-4=-5;b=-1. \\ c-2b=1;c+2=1;c=-1. \\ -2c=2;c=-1. \end{cases}$$

ومنه: $P(x)=(x-2)(2x^2-x-1)$

2) حلول المعادلة $P(x)=0$:

معناه: $(x-2)(2x^2-x-1)=0$

أي: $x-2=0$ • و $2x^2-x-1=0$ •

$x=2$ $x=-\frac{1}{2}$ أو $x=1$ ومنه: $S=\left\{1;2;-\frac{1}{2}\right\}$

3) $2e^{3x}-5e^{2x}+e^x+2=0$

بوضع: $e^x=y$ حيث $(y>0)$

فإن المعادلة تصبح: $2y^3-5y^2+y+2=0$

الحلول (من السؤال 2): $y=1$ ، $y=2$ ، $y=-\frac{1}{2}$.

ومنه: $e^x=2;x=\ln 2$ •

• $e^x=1;x=0$

• $e^x=-\frac{1}{2}$ (مستحيل)

ومنه: $S=\{0;\ln 2\}$

التمرين 03:

1) حل في R المعادلات التالية:

أ/ $e^{x-1}-1=0$

ب/ $e^{x-1}-e^{2x}=0$

جـ/ $e^{2x}+e^{1-2x}-(e+1)=0$

د/ $e^{2x}+2e^x+1=0$

هـ/ $e^{2|x|}+e^{|x|}-2=0$.

2) حل في R المتراجحات التالية:

أ) $e^{x-1}-e^{-2x+3}\geq 0$

ب) $-e^x-3<0$

جـ) $(e^x-2)(e^x+1)\geq 0$

د) $e^{2x}-5e^x+6<0$

هـ) $e^{2x}+e^x-6<0$

و) $\frac{e^x-1}{2-e^x}>0$

حل التمرين 03:

1) أ/ $e^{x-1}-1=0$ ومنه $e^{x-1}=1$ ومنه $e^{x-1}=e^0$

ومنه $x-1=0$ أي $x=1$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{1\}$.

ب/ $e^{x-1}-e^{2x}=0$ ومنه $e^{x-1}=e^{2x}$ ومنه $x-1=2x$

ومنه $x-2x=1$ ومنه $-x=1$ أي $x=-1$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{-1\}$.

جـ) $e^{2x}+e^{1-2x}-(e+1)=0$

$$e^{2x}+e\times e^{-2x}-(e+1)=0$$

$$e^{2x}+e\times\frac{1}{e^{2x}}-(e+1)=0$$

$\frac{e^{4x}+e-ee^{2x}-e^{2x}}{e^{2x}}=0$ بما أن $e^{2x}\neq 0$

فإن: $e^{4x}-(e+1).e^{2x}+e=0$

(بوضع: $X=e^{2x}$ حيث $X>0$)

فإن : $X^2-(e+1).X+e=0$

$$\Delta=(e+1)^2-4\times1\times e=e^2-2e+1=(e-1)^2$$

$$X_1=\frac{e+1+\sqrt{(e-1)^2}}{2}=\frac{e+1+e-1}{2}=e \text{ ،}$$

$$X_2=\frac{e+1-\sqrt{(e-1)^2}}{2}=\frac{e+1-e+1}{2}=1$$

ومنه : $X=1\to e^{2x}=1\to 2x=0\to x=0$

$$X=e\to e^{2x}=e\to 2x=1\to x=\frac{1}{2}$$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\left\{0\,;\frac{1}{2}\right\}$

د) $e^{2x}-2e^x+1=0$

$(e^x)^2-2\times1\times e^x+(1)^2=0$ ومنه : $(e^x-1)^2=0$

وعليه فإن: $e^x-1=0$ ومنه $e^x=1$

ومنه: $e^x=e^0$ وعليه: $x=0$ وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{0\}$

هـ) $e^{2|x|}+e^{|x|}-2=0$

(بوضع: $X=e^{|x|}$ حيث $X>0$) فإن: $X^2+X-2=0$

$$\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=9$$

$$X_1=\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=\frac{-1+3}{2}=1$$

و $X_2=\frac{-1-\sqrt{9}}{2}=\frac{-1-3}{2}=-2$ (مرفوض)

ومنه: $X=1$ أي $e^{|x|}=1$ وعليه $e^{|x|}=e^0$

ومنه $|x|=0$ أي $x=0$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{0\}$

2) أ/ $e^{x-1}-e^{-2x+3}\ge0$ ومنه $e^{x-1}\ge e^{-2x+3}$

ومنه $x-1\ge-2x+3$

ومنه $x+2x\ge1+3$

ومنه $3x\ge4$ أي $x\ge\frac{4}{3}$

وعليه مجموعة حلول المتراجحة : $S=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

ب/ $-e^x-3<0$ محققة دوما .

وعليه مجموعة حلول المتراجحة : $S=\left]-\infty;+\infty\right[$

جـ/ $(e^x-2)(e^x+1)\ge0$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $e^x+1>0$ فإن حلول المتراجحة $(e^x-2)(e^x+1)\ge0$ هي حلول المتراجحة $e^x-2\ge0$ ومنه $e^x\ge2$ ومنه $e^x\ge e^{\ln2}$

ومنه $x\ge\ln2$

وعليه مجموعة حلول المتراجحة : $S=\left[\ln2\,;+\infty\right[$

د/ $e^{2x}-5e^x+6<0$ (بوضع: $X=e^x$ حيث $X>0$)

فإن : $X^2-5.X+6<0$

$$\Delta=(-5)^2-4\times1\times(6)=1$$

$X_1=\frac{5+1}{2}=3$ و $X_2=\frac{5-1}{2}=2$

ومنه: $e^x=3$ أي $x=\ln3$ أو $e^x=2$ أي $x=\ln2$

جدول إشارة العبارة $X^2-5.X+6$:

قيم x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
إشارة $X^2-5.X+6$		+	0	−	0	+	

وبما أن : $X>0$

قيم x	0		2		3		$+\infty$
إشارة $X^2-5.X+6$		+	0	−	0	+	

وعليه تكون إشارة العبارة : $e^{2x}-5e^x+6$

قيم e^x	0		2		3		$+\infty$
إشارة $e^{2x}-5e^x+6$		+	0	−	0	+	

ومنه :

قيم x	$-\infty$		$\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
إشارة $e^{2x}-5e^{x}+6$		+	0	-	0	+	

وعليه تكون حلول المتراجحة: $S=]\ln 2;\ln 3[$

هـ/ $e^{2x}+e^{x}-6<0$ (بوضع : $X=e^{x}$ حيث $X>0$)

فإن : $X^{2}+.X-6<0$

$$\Delta=(1)^{2}-4\times1\times(-6)=25$$

$X_1=\frac{-1+5}{2}=2$ و $X_2=\frac{-1-5}{2}=-3$ (مرفوض)

ومنه : $e^{x}=2$ أي $x=\ln 2$

جدول إشارة العبارة $X^{2}+.X-6$:

قيم x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
إشارة $X^{2}+.X-6$		+	0	-	0	+	

وبما أن : $X>0$

قيم x	0		2		$+\infty$
إشارة $X^{2}+.X-6$		-	0	+	

وعليه تكون إشارة العبارة : $e^{2x}+e^{x}-6$

قيم e^{x}	0		2		$+\infty$
إشارة $e^{2x}+e^{x}-6$		-	0	+	

ومنه :

قيم x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
إشارة $e^{2x}+e^{x}-6$		-	0	+	

وعليه تكون حلول المتراجحة: $S=]-\infty;\ln 2[$

و) $\frac{e^{x}-1}{2-e^{x}}>0$ لما: $e^{x}-1=0$ فإن: $e^{x}=1$ أي $x=0$.

لما: $2-e^{x}=0$ فإن: $e^{x}=2$ أي $x=\ln 2$.

قيم x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
إشارة $e^{x}-1$		-	0	+		+	
إشارة $2-e^{x}$		+		+	0	-	
إشارة $\frac{e^{x}-1}{2-e^{x}}$		-	0	+		-	

وعليه تكون حلول المتراجحة: $S=]0;\ln 2[$

التمرين 04:

1) حل في R المعادلات التالية : (المجهول x)

أ) $\ln(3+x)=\ln 3+\ln x$

ب) $\ln x+\ln(x-2)=\ln(x+10)$

جـ) $\ln(x^{2}+x)=1$

د) $\ln|1-x|=\ln 3$

هـ) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-1$

و) $\ln(x^{2}-2x)=\ln(x+10)$

2) حل في R المتراجحات ذات المجهول x التالية :

أ) $\ln^{2}x-\ln x-6<0$

ب) $\ln(2x+3)<5$

جـ) $\ln x>\ln(2x-1)$

د) $x.\ln x-\ln x\geq 0$

حل التمرين 04:

1) أ) $\ln(3+x)=\ln 3+\ln x$

المعادلة معرفة إذا و فقط إذاكان :

$3+x>0$ و $x>0$ أي : $x>0$

- من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln(3+x)=\ln 3+\ln x$

ومنه $\ln(3+x)=\ln 3x$ ومنه $3+x=3x$

ومنه $x=\frac{3}{2}$

ب) $\ln x+\ln(x-2)=\ln(x+10)$

المعادلة معرفة إذا وفقط إذاكان :

$x>0$ و $2-x>0$ و $x+10>0$ أي: $x>2$

- من أجل كل x من $]2;+\infty[$:

$$\ln x+\ln(x-2)=\ln(x+10)$$

ومنه $\ln(x(x-2))=\ln(x+10)$

ومنه $x(x-2)=x+10$

ومنه $x^2-3x-10=0$

ومنه $x=5$ أو $x=-2$

أي $x=5$ (لأن : $-2\notin]2;+\infty[$)

ج) $\ln(x^2+x)=1$

تكون المعادلة معرفة إذا كان: $x^2+x\succ 0$

ومنه : $x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

ولدينا : $\ln(x^2+x)=1$ أي $x^2+x=e$

أي : $x^2+x-e=0$

$$\Delta=1^2-4.1.(-e)=1+4e$$

ومنه : $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1+4e}}{2}\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

ومنه : $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{1+4e}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}\right\}$

د) $\ln|1-x|=\ln 3$

تكون المعادلة معرفة إذا كان: $1-x\neq 0$ ومنه : $x\neq 1$

أي : $x\in R-\{1\}$.

ولدينا : $\ln|1-x|=\ln 3$ أي $|1-x|=3$

ومنه : $1-x=3$ أو $1-x=-3$

أي : $x=-2\in[R-\{1\}]$ أو $x=4\in[R-\{1\}]$

ومنه : $S=\{-2;4\}$

هـ) $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=-1$ تكون المعادلة معرفة إذا كان :

$$\frac{x+1}{x-1}>0$$

قيم x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
إشارة $x+1$	$-$	0	$+$		$+$
إشارة $x-1$	$-$		$-$	0	$+$
إشارة $\frac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

ومنه : $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

ولدينا : $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=-1$

$\dfrac{x+1}{x-1}=e^{-1}$ أي : $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1}{e}$ أي: $e.x+e=x-1$

ومنه : $e.x-x=-e-1$

ومنه : $x=\dfrac{-e-1}{e-1}$ أي : $x=\dfrac{e+1}{1-e}$

و $x=\dfrac{e+1}{1-e}\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ومنه : $S=\left\{\dfrac{e+1}{1-e}\right\}$

و) $\ln(x^2-2x)=\ln(x+10)$

المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان :

بـ : $x+10>0$ و $x^2-2x>0$

تكافئ $x\geq-10$ و $x(x-2)>0$

تكافئ $x\geq-10$ و $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

أي : $x\in]-10;0[\cup]2;+\infty[$

- من أجل كل x من $]-10;0[\cup]2;+\infty[$

$$\ln(x^2-2x)=\ln(x+10)$$

تكافئ $x^2-2x=x+10$ تكافئ $x^2-3x-10=0$

تكافئ $x=5$ أو $x=-2$

2) أ) $\ln^2 x - \ln x - 6 < 0$

يوضع $X = \ln x$

لاحظ أن : $X^2 - X - 6 = (X+2)(X-3)$

أي : $X^2 - X - 6 < 0$ حلولها $-2 < X < 3$

ومنه تكون: $\ln^2 x - \ln x - 6 < 0$ لما يكون $-2 < \ln x < 3$

أي $e^{-2} < x < e^3$

ومنه حلول المتراجحة هي المجموعة : $S =]e^{-2}, e^3[$

ب) $\ln(2x+3) < 5$

تكون المتراجحة معرفة إذا كان : $2x+3 \succ 0$

أي : $x \succ -\frac{3}{2}$ ومنه : $x \in \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$

ولدينا : $\ln(2x+3) < 5$

$2x+3 \prec e^5$ أي : $x \prec \frac{e^5-3}{2}$ ومنه: $x \in \left]-\infty;\frac{e^5-3}{2}\right[$

ومنه : $S = \left]-\infty;\frac{e^5-3}{2}\right[\cap \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[= \left]-\frac{3}{2};\frac{e^5-3}{2}\right[$

جـ) $\ln x > \ln(2x-1)$

تكون المتراجحة معرفة إذا كان : $x \succ 0$ و $2x-1 \succ 0$

$x \succ 0$ معناه : $x \in]0;+\infty[$

$2x-1 \succ 0$ أي: $x \succ \frac{1}{2}$ معناه : $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

ومنه : $x \in]0;+\infty[\cap \left]\frac{1}{2};+\infty\right[= \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

ولدينا : $\ln x > \ln(2x-1)$

أي : $x \succ 2x-1$ أي : $x \prec 1$ ومنه : $x \in]-\infty;1[$

ومنه : $S =]-\infty;1[\cap \left]\frac{1}{2};+\infty\right[= \left]\frac{1}{2};1\right[$

د) $x.\ln x - \ln x \geq 0$

تكون المتراجحة معرفة إذا كان : $x \succ 0$ أي : $x \in]0;+\infty[$

ولدينا : $x.\ln x - \ln x \geq 0$ أي $(x-1).\ln x \geq 0$

قيم x	0	1	$+\infty$
إشارة $x-1$	−	0	+
إشارة $\ln x$	−	0	+
إشارة $(x-1)\ln x$	+	0	+

ومنه : $x \in]0;+\infty[$ ومنه : $S =]0;+\infty[$

التمرين 05:

1) حل في R المعادلات التالية :أ/ $4(\ln x)^2 - 1 = 0$

ب/ $4(\ln|x|)^2 - 1 = 0$

2) نعتبر كثير الحدود $A(x)$ حيث :

$$A(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$$

أ/ أحسب $A(2)$ ثم بين أن :

$$A(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

ب/ حل في R المعادلة $A(x) = 0$

ج/ استنتج حلول المعادلة :

$$4(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$$

حل التمرين 05 :

1) أ/ $4(\ln x)^2 - 1 = 0$ المعادلة معرفة إذا كان $x > 0$:

نضع : $X = \ln x$ ومنه : $4X^2 - 1 = 0$

أي : $X^2 = \frac{1}{4}$

ومنه: $X = \frac{1}{2}$ أو $X = \frac{-1}{2}$

ومنه: $\ln x = \frac{1}{2}$ أو $\ln x = \frac{-1}{2}$

ومنه: $x = e^{\frac{1}{2}}$ أو $x = e^{\frac{-1}{2}}$ ومنه: $S = \left\{e^{\frac{-1}{2}}; e^{\frac{1}{2}}\right\}$

ب/ $4(\ln|x|)^2-1=0$

المعادلة معرفة إذا كان: $x\neq 0$

نضع: $X=\ln|x|$ ومنه: $4X^2-1=0$ أي: $X^2=\frac{1}{4}$

ومنه: $X=\frac{1}{2}$ أو $X=\frac{-1}{2}$

ومنه: $\ln|x|=\frac{1}{2}$ أو $\ln|x|=\frac{-1}{2}$

ومنه: $|x|=e^{\frac{1}{2}}$ أو $|x|=e^{\frac{-1}{2}}$

($x=-e^{\frac{1}{2}}$ | $x=e^{\frac{1}{2}}$) أو ($x=-e^{-\frac{1}{2}}$ | $x=e^{-\frac{1}{2}}$)

ومنه: $S=\left\{e^{\frac{-1}{2}};e^{\frac{1}{2}};-e^{\frac{1}{2}};-e^{\frac{-1}{2}}\right\}$

2) $A(x)=4x^3-8x^2-x-2$

أ) $A(2)=4(2)^3-8(2)^2-2-2=0$

تعيين $c;b;a$ حيث: $A(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$

$(x-2)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$
$=a^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

بالمطابقة:
$$\begin{cases}a=4\\ b-2a=-8;b-8=-8;b=0\\ c-2b=-1;c=-1\\ -2c=2;c=-1\end{cases}$$

ومنه: $A(x)=(x-2)(4x^2-1)$

ب) حلول المعادلة $A(x)=0$ في R:

$A(x)=0$ أي: $(x-2)\,(4x^2-1)=0$

إما: $x-2=0$ ومنه: $x=2$

أو $(4x^2-1)=0$ ومنه: $x^2=\frac{1}{4}$ أي: $x=\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{-1}{2}$

ومنه $S=\left\{2;\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right\}$

ج) استنتاج حلول المعادلة:

$4(\ln x)^3-8(\ln x)^2-\ln x+2=0$

نضع: $X=\ln x$ حيث $x>0$

$4X^3-8X^2-X+2=0$

$$\begin{cases}X=\frac{1}{2};\ln x=\frac{1}{2};x=e^{\frac{1}{2}}\\ X=\frac{-1}{2};\ln x=\frac{-1}{2};x=e^{\frac{-1}{2}}\\ X=2;\ln x=2;x=e^2\end{cases}$$

ومنه $S=\left\{e^{\frac{1}{2}};e^{\frac{-1}{2}};e^2\right\}$

التمرين 06:

اختر الجواب الصحيح مع التبرير .

1) حلول المتراجحة $\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)<0$ في مجموعة الأعداد الحقيقية هي المجموعة S حيث:

أ/ $S=]-\infty;-2[$ ، ب/ $S=]-\infty;1[$

جـ/ $S=]2;+\infty[$ ، د/ $S=]-2;+\infty[$

2) f دالة حيث: $f(x)=2x+1+x.\ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال: $]0;+\infty[$ و

أ/ $f'(x)=x.f(x)+2$

ب/ $f'(x)+f(x)=2x+5+x\ln x$

جـ/ $f(x)-xf'(x)=-x+1$

د/ $f'(x)=2f(x)-x\ln x$

3) بيان الدالة f حيث: $f(x)=x.e^x$ يقبل في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ مماسا عند النقطة O معامل توجيهه يساوي:

أ/ 2 ، ب/ -2 ، جـ/ -1 ، د/ 1 .

4/ $\lim_{x\to+\infty}[2x-x.\ln(x-1)]$ هي: أ/ $-\infty$ ،

ب/ $+\infty$ ، جـ/ 0 ، د/ 1 .

حل التمرين 06 :

1) $\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)<0$ تكون المتراجحة معرفة إذا كان :

$$\frac{x+2}{x-1}>0$$

قيم x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
إشارة $x+2$	-	0	+	+
إشارة $x-1$	-		- 0	+
إشارة النسبة	+	0	- 0	+

ومنه : $x\in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

ولدينا : $\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)<0$ أي : $\frac{x+2}{x-1}<1$

أي : $\frac{x+2}{x-1}-1<0$ أي : $\frac{3}{x-1}<0$

ومنه : $x\in]-\infty;1[$

ومنه:

$$S=(]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[)\cap(]-\infty;1[)=]-\infty;-2[$$

معناه الإجابة الصحيحة هي : (أ)

2) $f(x)=2x+1+x.\ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$:

حيث : $f'(x)=2+1.\ln x+\frac{1}{x}.x=3+\ln x$

ولدينا : $f'(x)\neq x.f(x)+2$

و $f'(x)+f(x)\neq 2x+5+x\ln x$

و $f'(x)\neq 2f(x)-x\ln x$

و $f(x)-xf'(x)=2x+1+x.\ln x-3x-x\ln x$

$$=-x+1$$

معناه الإجابة الصحيحة هي : (جـ) .

3) $f(x)=x.e^{x}$

ومنه : $f'(x)=e^{x}+x.e^{x}=(x+1).e^{x}$

ولدينا : $f'(0)=e^{0}(0+1)=1$ (معامل توجيه المماس عند النقطة O) معناه الإجابة الصحيحة هي : (د) .

4)

$$\lim_{x\to+\infty}[2x-x.\ln(x-1)]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x.(2-\ln(x-1))$$

$$=-\infty$$

(لأن : $x\to+\infty$ و $2-\ln(x-1)\to-\infty$)

معناه الإجابة الصحيحة هي : (أ) .

التمرين 07:

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$ و (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ أدرس تغيرات الدالة f .

2/ بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب معادلتهما.

3/ أثبت أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحى (C)

4/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة A .

■ لتكن g الدالة المعرفة على IR كمايلي:

$$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

5/ بين أن من أجل كل x من IR : $g'(x)=\frac{(e^{x}-1)^2}{4(1+e^{x})^2}$

6/ شكل جدول تغيرات الدالة g .

ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على IR

7/ استنتج الوضعية النسبية للمماس (T) بالنسبة إلى المنحنى (C) .

8/ أرسم المنحنى (C).

حل التمرين 07 :

1-تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=0$ (لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)}=\frac{1}{0+1}=1$$

(لأن $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$)

f قابلة للاشتقاق على IR ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\frac{e^x(1+e^x)-e^x.e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

إذن: من أجل كل x من IR: $f'(x)\rangle 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

قيم x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	0 ↗	1

2) المستقيمات المقاربة:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

إذن: المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذن: المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3) من أجل كل x من IR فإن: $(-x)\in IR$

أي $[2(0)-x]\in IR$

و $$f(-x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}=\frac{1}{e^x+1}$$

من جهة أخرى $$2(1/2)-f(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$$

نتيجة: من أجل كل x من IR :

$$f(2(0)-x)=2(1/2)-f(x)$$

إذن: النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

4) معادلة المماس عند النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ تكتب من الشكل:

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$f'(0)=\frac{1}{(2)^2}=\frac{1}{4}$ و $f(0)=1/2$ ومنه: معادلة المماس (T)

هي: $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

5) g قابلة للإشتقاق على IR ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=\frac{1}{4}-f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{(1+e^x)^2-4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$=\frac{1+2e^x+e^{2x}-4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$=\frac{(1-e^x)^2}{4(1+e^x)^2}=\frac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}=\frac{1-2e^x-e^{2x}}{4(1+e^x)^2}$$

6) لاحظ أن $g'(x)$ من إشارة $(e^x-1)^2$ لأن المقام دوما موجب ولدينا:

قيم x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	+	

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=-\infty$$

(لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$)

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}+1=+\infty$$

(لأن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$)

منه: جدول تغيرات الدالة g :

$$g(0)=\frac{1}{4}(0)+\frac{1}{2}-f(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

قيم x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	+	0	+
g	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$:

قيم x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g(x)$	−	0	+

7) الوضعية النسبية لـ (C) و (T) :لدينا:

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)=g(x)$$

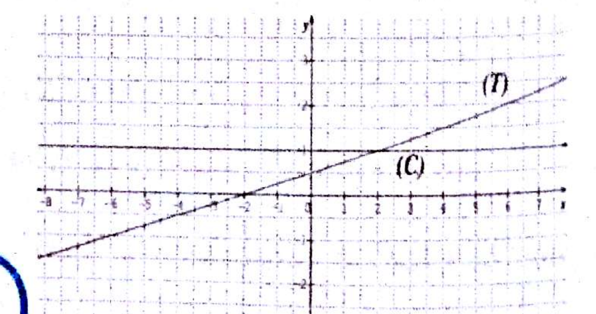
إذن: إشارة $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$ هي إشارة $g(x)$.

ومنه: لما $x\in\left]-\infty;0\right[$: المماس (T) يقع تحت المنحنى (C).

لما $x=0$: المماس (T) يقطع المنحنى (C).

لما $x\in\left]0;+\infty\right[$: المماس (T) يقع فوق المنحنى (C).

8-الإنشاء



التمرين 08:

الهدف من هذه المسألة هو حساب : ($\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^x$)

f دالة معرفة على $\left[0;+\infty\right[$ حيث : $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$

1) أوجد عبارة $f'(x)$ و $f''(x)$.

2) حل في R المتراجحة : $e^x-1\geq 0$ ثم عين إشارة $f''(x)$ على المجال $\left[0;+\infty\right[$ و استنتج اتجاه تغير الدالة $f'(x)$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f' (النهايات لا يطلب حسابها) ثم استنتج إشارة f' .

4) عين اتجاه تغير الدالة f و استنتج إشارتها .

5) أثبت أنه من أجل كل x من المجال $\left]0;+\infty\right[$ فإن : $\frac{e^x}{x}\geq\frac{x}{2}$.

6 – باستعمال نظريات النهايات بالحصر إستنتج $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$

ثم استنتج $\lim_{x\to-\infty} xe^x$

7) بالاعتماد على ما سبق أحسب :

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)$ ، 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^x}{x}$ ، 4) $\lim_{x\to-\infty}(2x-1).e^x$

8) استنتج مما سبق حساب لـ($\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ و $\lim_{x\to 0} x\ln x$)

9) أحسب: 1) $\lim_{x\to+\infty}(3-x-2\ln x)$

2) $\lim_{x\to+\infty}(3-x-2\ln(x+1))$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln(x-2)}{x+1}$

4) $\lim_{x\to 0}\left(2-x\ln x^3\right)$

حل التمرين 08 :

1) من أجل $x \in [0;+\infty[$: $f'(x)=e^x-\frac{2x}{2}=e^x-x$

و $f''(x)=e^x-1$

2) حل في R المتراجحة : $e^x-1\geq 0$ أي $e^x\geq 1$

ومنه : $x\geq 0$ ومنه : $S=[0;+\infty[$

إشارة $f''(x)$:

من أجل $x\in[0;+\infty[$ فإن $e^x-1\geq 0$ أي : $f''(x)\geq 0$

ومنه : f' متزايدة تماما على المجال $[0\,;+\infty[$.

3) جدول تغيرات الدالة f' : ($f'(0)=1$)

قيم x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
إشارة $f''(x)$	$+$
$f'(x)$	1 ↗

إشارة $f'(x)$:

نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل $x\in[0;+\infty[$:

$f'(x)\geq 1$ ومنه $f'(x)$ موجبة تماما .

4) بما أن $f'(x)$ موجبة تماما من أجل $x\in[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

إشارة الدالة f :

بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و $f(0)=1$

فإن : من أجل $x\in[0;+\infty[$ $f(x)\geq f(0)$

أي : $f(x)\geq 1$ ومنه : f موجبة تماما .

5) من أجل $x\in]0;+\infty[$ فإن : $f(x)\geq 0$

أي: $e^x-\frac{x^2}{2}\geq 0$ ومنه : $e^x\geq\frac{x^2}{2}$

ومنه : $\frac{e^x}{x}\geq\frac{x}{2}$

6) لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

وبما أنه من أجل $x\in]0;+\infty[$: $\frac{e^x}{x}\geq\frac{x}{2}$

فإن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\geq\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

إستنتاج $\lim_{x\to-\infty}x.e^x$: نضع : $X=-x$ أي : $x=-X$

لما : $x\to-\infty$ فإن : $X\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}x.e^x=\lim_{X\to+\infty}(-X).e^{-X}$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{-X}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{-1}{\frac{e^X}{X}}=0$$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty}x.e^x=0$

7) /1 $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=+\infty-\infty$ (F.I)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$$

(لأن : $\frac{e^x}{x}\to+\infty$ و $x\to+\infty$)

/2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}$ (F.I)

ولدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$

/3 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\frac{+\infty-\infty}{+\infty}$ (F.I)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\left(1-e^x\right)=-\infty$$

(لأن : $\frac{e^x}{x}\to+\infty$ و $1-e^x\to-\infty$)

/4 $\lim_{x\to-\infty}(2x-1).e^x=-\infty\times 0$ (F.I)

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-1).e^x=\lim_{x\to-\infty}\left[2xe^x-e^x\right]=0$$

(لأن : $xe^x\to 0$ و $e^x\to 0$)

8) حساب : $\left(\lim_{x\to 0} x\ln x \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)$

• $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}$ (F.I)

نضع : $X=\ln x$ ومنه : $x=e^X$

لما : $x\to+\infty$ فإن : $X\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=0$$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

• $\lim_{x\to 0} x\ln x=0\times(-\infty)$ (F.I)

نضع : $X=\frac{1}{x}$ ومنه : $x=\frac{1}{X}$

لما : $x\to 0$ فإن : $X\to+\infty$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\left(\ln\frac{1}{X}\right)$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\left[-\frac{1}{X}(\ln X)\right]$$

$$=\lim_{X\to+\infty}-\frac{\ln X}{X}=0$$

ومنه : $\lim_{x\to 0} x\ln x=0$

9) حساب: 1) $\lim_{x\to+\infty}(3-x-2\ln x)$

2) $\lim_{x\to+\infty}(3-x-2\ln(x+1))$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln(x-2)}{x+1}$

4) $\lim_{x\to 0}\left(2-x\ln x^3\right)$

1)

$$\lim_{x\to+\infty}(3-x-2\ln x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{x}-1-2\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

2)

$$\lim_{x\to+\infty}(3-x-2\ln(x+1))$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left(\frac{3}{x+1}-\frac{x}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$$

$$=-\infty$$

لأن : $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0\right)$

لأنها من الشكل : $\left(\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0\right)$

3)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln(x-2)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{\ln(x-2)}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x+1}\times\frac{\ln(x-2)}{x-2}\right)=0$$

4) $\lim_{x\to 0}\left(2-x\ln x^3\right)=\lim_{x\to 0}(2-3x\ln x)=2$

التمرين 09:

الهدف من هذه المسألة هو حساب :

$\left(\lim_{x\to-\infty} x^n e^x \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}\right)$

و $\left(\lim_{x\to 0} x^n\ln x \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}\right)$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن :

$$e^{x-n\ln x}=\frac{e^x}{x^n}$$

2) أحسب : $\lim_{x\to+\infty}(x-n\ln x)$ ، ثم استنتج : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}$.

3) بوضع $X=-x$ بين أن : $x^n e^x=\frac{(-X)^n}{e^X}$

ثم استنتج $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x$.

4) بوضع: $X = \ln x$ أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$

5) بوضع: $X = \dfrac{1}{x}$ أحسب: $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x$

6) بالاعتماد على ما سبق أحسب:

أ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 - 2e^x\right)$ ب/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 - 2x + 1\right)e^x$

جـ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - 3\ln(x+1)\right)$

حل التمرين 09:

1) $e^{x-n\ln x} = e^{x-\ln x^n} = e^x e^{-\ln x^n} = \dfrac{e^x}{e^{\ln x^n}} = \dfrac{e^x}{x^n}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - n\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - n\dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-n\ln x} = +\infty$

3) بوضع $X = -x$ فإن: $x = -X$

لما: $x \to -\infty$ فإن: $X \to +\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(-X)^n}{e^X}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} (-1)^n \dfrac{X^n}{e^X} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ (F.I)

نضع: $X = \ln x$ ومنه: $x = e^X$

لما: $x \to +\infty$ فإن: $X \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln e^X}{\left(e^X\right)^n}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^{nX}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{n}.\dfrac{nX}{e^{nX}}$

بوضع: $u = n.X$ لما: $X \to +\infty$ فإن: $n.X \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{n}.\dfrac{nX}{e^{nX}} = \lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{n}.\dfrac{u}{e^u} = 0$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

5) $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0 \times (-\infty)$ (F.I)

نضع: $X = \dfrac{1}{x}$ ومنه: $x = \dfrac{1}{X}$ لما: $x \to 0$

فإن: $X \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X^n}\left(\ln\dfrac{1}{X}\right)$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \left[-\dfrac{1}{X^n}(\ln X)\right]$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{\ln X}{X^n} = 0$

ومنه: $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0$

6) أ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 - 2e^x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 - 2.\dfrac{e^x}{x^3}\right) = -\infty$

لأن: ($\dfrac{e^x}{x^3} \longrightarrow +\infty$ و $x^3 \longrightarrow +\infty$)

ب/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 - 2x + 1\right)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3e^x - 2xe^x + e^x\right) = -\infty$

لأن: ($x^3e^x \longrightarrow 0$ و $xe^x \longrightarrow 0$)

جـ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - 3\ln(x+1)\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\left[\dfrac{2x}{x+1} - 3\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = +\infty$

لأن: ($\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \to 0$ و $\dfrac{2x}{x+1} \to 2$)



التمرين 10 :

• ❶ لتكن الدالة g المعرفة على R كما يلي :

$$g(x)=2e^{x}+2x-7$$

1) أحسب النهايات عند $-\infty$ و $+\infty$ للدالة g.

2) أحسب $g'(x)$ واستنتج اتجاه تغير g وشكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.94<\alpha<0.96$.

4) عين إشارة g على R.

• ❷ لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x)=(2x-5)(1-e^{-x})$$

1) أدرس إشارة الدالة f على R .

2) أحسب النهايات عند $-\infty$ و $+\infty$ للدالة f .

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$f'(x)=g(x).e^{-x}$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على R

4) شكل جدول تغيرات f .

5) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-5$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

6) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

7) بفرض $-2<f(\alpha)<-1$ أنشئ (Δ) و (C_f).

حل التمرين 10 :

• ❶ لتكن الدالة g المعرفة على R كما يلي :

$$g(x)=2e^{x}+2x-7$$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

2) من أجل كل x من R : $g'(x)=2e^{x}+2$

من أجل كل x من R فإن $g'(x)>0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على R .

جدول تغيرات g :

قيم x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		+	
g	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة g مستمرة و متزايدة على المجال $[0,94;0,96]$

ومنه : $g(0,94)\times g(0,96)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.94<\alpha<0.96$.

4) إشارة g على R:

قيم x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة g		-	0	+	

• ❷ لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x)=(2x-5)(1-e^{-x})$$

1) دراسة إشارة الدالة f على R .

قيم x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
إشارة $2x-5$		-		-	0	+	
إشارة $1-e^{-x}$		-	0	+		+	
إشارة $f(x)$		+	0	-	0	+	

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)(1-e^{-x})=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-5)(1-e^{-x})=+\infty$

3) من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$f'(x)=(2)(1-e^{-x})+(e^{-x})(2x-5)$

ومنه : $f'(x)=2-2e^{-x}+2xe^{-x}-5e^{-x}$

ومنه : $f'(x)=e^{-x}(2e^{x}+2x-7)$

ومنه : $f'(x)=g(x).e^{-x}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه : f متزايدة تماما

لما $x\in[\alpha;+\infty[$ و f متناقصة تماما لما $x\in]-\infty;\alpha]$

4) جدول تغيرات f :

قيم x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

5) $f(x)=(2x-5)(1-e^{-x})$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-5)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)e^{-x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-x}=0$

أنها من الشكل : $\lim\limits_{X\to-\infty} X.e^{X}=0$

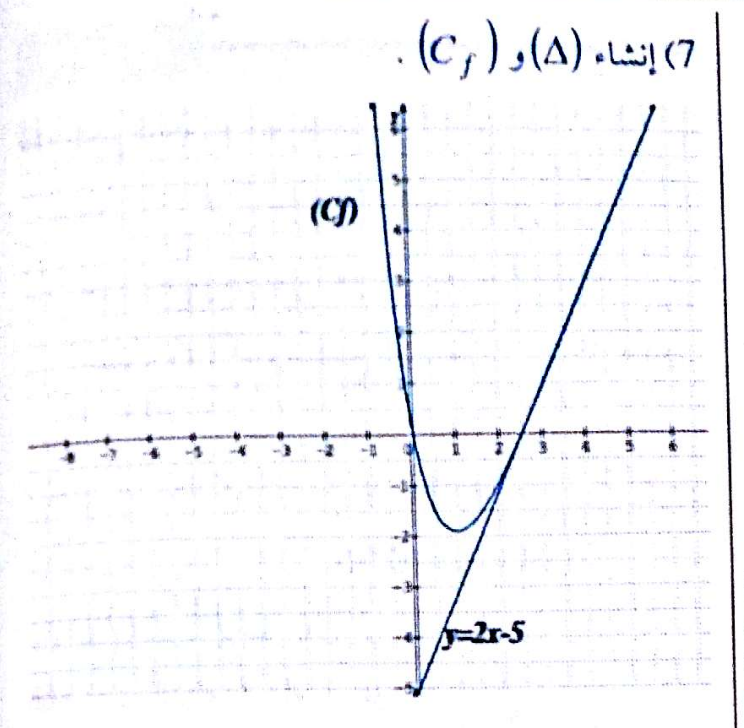
ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-5$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

6) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-(2x-5)=-(2x-5)e^{-x}$

قيم x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
إشارة $2x-5$	$-$		$+$
إشارة e^{-x}	$+$		$+$
$-(2x-5)e^{-x}$	$+$		$-$
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	فوق	يتقاطع	تحت

7) إنشاء (Δ) و (C_f) .



التمرين 11 :

❶ g دالة معرفة على R بـ: $g(x)=2+\frac{x-1}{e^{x}}$

1- أ) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$

ب) أدرس تغيرات الدالة g

2- بين أن $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]-0,38;-0,37[$

3- استنتج إشارة $g(x)$ على R .

❷ f دالة معرفة على R بـ : $f(x)=2x+1-\frac{x}{e^{x}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(نقبل أن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$)

2- أ) بين انه من اجل كل x من R : $f'(x)=g(x)$

و استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4- (T_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي.

عين العدد الحقيقي m حتى يكون (T_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة I يطلب تعيين احداثياتها.

5- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيينها.

6- بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

7- ارسم (Δ) و (C_f). (نأخذ $\alpha \approx -0.375$)

حل التمرين 11 :

❶ لدينا: $g(x) = 2 + \dfrac{x-1}{e^x}$ و $D_g = R$

1- أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2 + \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} - \dfrac{1}{e^x}\right) = 2$

لان $\left(\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} \to 0\right)$

ب) دراسة تغيرات الدالة g :

$$g'(x) = \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ و متناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$.

2- إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]-0,38;-0,37[$:

لدينا : $g(-0,38) \approx -0,03$ و $g(-0,37) \approx 0,01$

بما أن g مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]-0,38;-0,37[$ و $g(-0,37) \times g(-0,38) < 0$ فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحدا α في المجال $]-0,38;-0,37[$ بحيث : $g(\alpha) = 0$.

3- إشارة $g(x)$ على R .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	−	0	+

❷ f دالة معرفة على R بـ : $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{x}{e^x}$

1- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

لان ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(2 + \dfrac{1}{x} - e^{-x}\right) = +\infty$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ لان ($\lim\limits_{-x \to -\infty}\left(-xe^{-x}\right) = 0$)

2- أ) الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال R و لدينا :

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = 2 + \frac{x-1}{e^x} = g(x)$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+

ب) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3- أ) المستقيم $(\Delta) : y = 2x + 1$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ معناه $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - (2x+1)) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+1))=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$$

ومنه $(\Delta): y=2x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) الوضعية : لدينا : $f(x)-(2x+1)=-\frac{x}{e^x}$

$-\frac{x}{e^x}=0$ تكافئ $x=0$ ومنه (C_f) يقطع (Δ) في

النقطة $(0;1)$ حيث $f(0)=1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-(2x+1)=-\frac{x}{e^x}$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)

4- ليكن : $(T_m): y=2x+m$ حيث $m\in R$

(T_m) مماسا للمنحنى (C_f) معناه $f'(x)=2=g(x)$

$g(x)-2=0$ تكافئ $x=1$ و منه $I(1;f(1))$

حيث $f(1)=3-e^{-1}$

$$(T_m): y=2(x-1)+3-e^{-1}=2x+1-e^{-1}$$

وعليه $m=1-e^{-1}$

5- (C_f) **يقبل نقطة انعطاف** A : الدالة f' قابلة الاشتقاق على المجال R و لدينا : $f''(x)=g'(x)=\frac{2-x}{e^x}$

$f''(x)=0$ تكافئ $x=2$ و منه $A(2;f(2))$

حيث $f(2)=5-2e^{-2}\approx 4{,}72$

6- بين أن $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$:

لدينا $f(\alpha)=2\alpha+1-\frac{\alpha}{e^\alpha}$

بما أن $g(\alpha)=0$ فان $2+\frac{\alpha-1}{e^\alpha}=0$

وعليه $e^\alpha=\frac{1-\alpha}{2}$

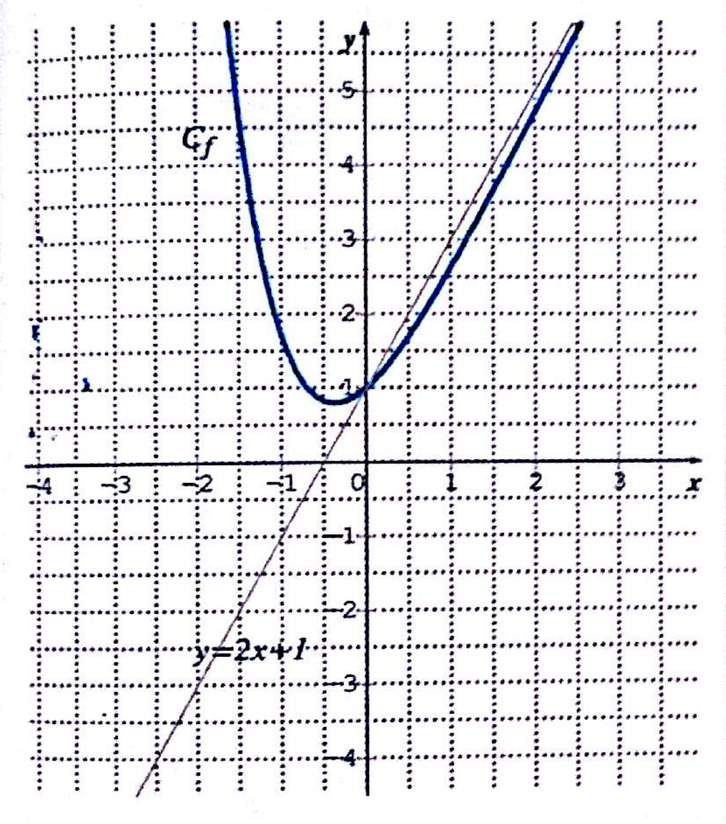
بالتعويض في $f(\alpha)$ نجد : $f(\alpha)=2\alpha+1-\frac{\alpha}{\frac{1-\alpha}{2}}$

$$=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$$

7- رسم (Δ) و (C_f) :

$$f(-0{,}375)=\frac{2(-0{,}375)^2+(-0{,}375)-1}{(-0{,}375)-1}$$

$$\approx 0{,}8977$$



التمرين 12:

I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ حيث a و b عددان حقيقيان .

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول 1cm.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي:

$g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ/ بين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$ و عبر هذه النتيجة بيانيا.

(تذكر $\left(\lim_{x\to-\infty} ue^{u}=0\right)$).

ب/ أدرس تغيرات الدالة g ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج/ بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثييها.

د/ أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

هـ/ أرسم (C_g).

III) لتكن الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي:

$K(x)=g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

حل التمرين 12:

I) $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

تعين a و b حيث: $f(-1)=1$ و $f'(-1)=-e$

f تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$:

$$f'(x)=ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}$$

ومنه $f'(x)=-(ax+b-a)e^{-x}$

نجد: $\begin{cases}f(-1)=1\\ f'(-1)=-e\end{cases}$ يعني $\begin{cases}(-a+b)e+1=1\\ -(-2a+b)e=-e\end{cases}$

$a=-1$ و $b=-1$ أي: $f(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

II) $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

1-أ) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}+1\right)=1$

التفسير: (C_g) يقبل مستقيم مقارب أفقي عند $+\infty$ معادلته $y=1$.

ب) دراسة تغيرات الدالة g:

g تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$: $g'(x)=xe^{-x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة x.

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

g متناقصة تماما على $[-2,0]$ و متزايدة تماما على $]2,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g.

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1+e^2$	↘	0	↗	1

ج) g' تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$:

$$g''(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

x	-2		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	

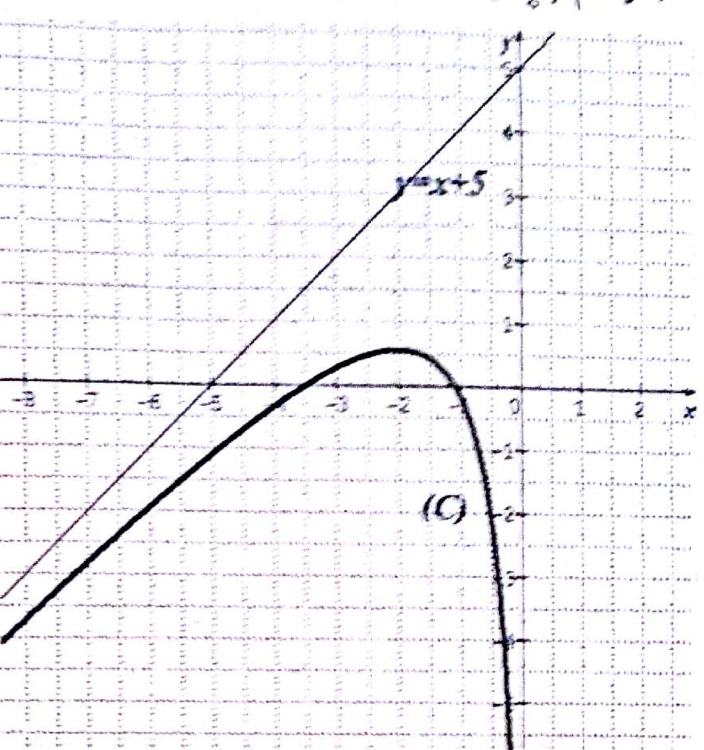
الدالة المشتقة الثانية g'' انعدمت عند 1 و غيرت من إشارتها بجوار 1 إذن النقطة $I\left(1;1-\frac{2}{e}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_g).

د/ معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند I:

$$(T): y=g'(1)(x-1)+g(1)$$

$$y=\frac{1}{e}(x-1)+1-\frac{2}{e} \quad , \quad y=\frac{1}{e}x+1-\frac{3}{e}$$

هـ/ رسم (C_g) :



III) K تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$ حيث :

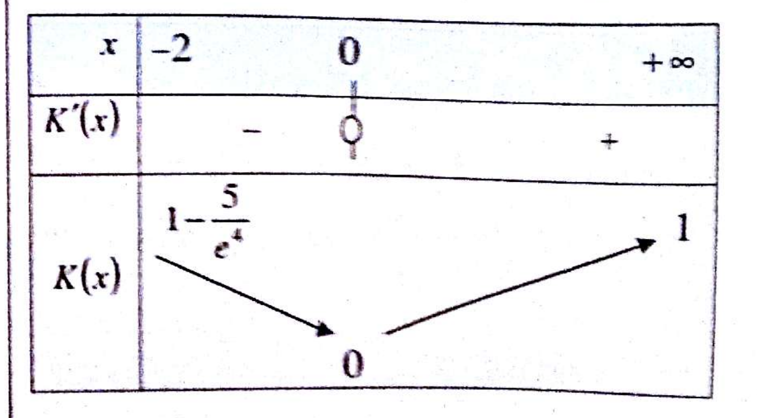
$$K'(x)=2x\ g'(x^2)$$

$$K'(x)=2xx^2e^{-x2}=2x^3e^{-x2}$$

إشارة $K'(x)$ هي إشارة x.

K متناقصة تماما على المجال $[-2,0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

جدول تغيرات K :



x	-2		0		$+\infty$
$K'(x)$		$-$	0	$+$	
$K(x)$	$1-\frac{5}{e^4}$	↘	0	↗	1

التمرين 13:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي:

$$f(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❶ أ- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ،

$$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}.$$

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

❸ أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

❹ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3{,}5<\alpha<-3{,}4$ و $-1{,}1<\beta<-1$.

❺ أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

❻ أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها.

حل التمرين 13 :

❶ أ- حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ ، ثم التفسير النتيجة هندسيا:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left[x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\left[6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$.

ومنه المستقيم الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب عمودي.

ب- حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

بما أن: $\lim_{x\to-\infty}\left[6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0$ و $\lim_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty$

فإن: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$

2 إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ،

$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و دالتها المشتقة:

$$f'(x)=1+6.\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}}=1+6.\frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x)=1+6.\frac{-1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}$$

$$=1+6.\frac{-1}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)-6}{x(x-1)}$$

أي: $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

استنتاج اتجاه تغيرات الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة المشتقة من إشارة البسط x^2-x-6 لأنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$: $x(x-1)>0$.

لدينا: $x^2-x-6=0$ ومنه $x=-2$ وهومقبول أو $x=3$ وهو مرفوض.

وبالتالي: f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و f متناقصة تماما على المجال $[-2;0[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3+6Ln\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

3 أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل:

المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل يعني أن:

$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+5)\right]=0$.

لدينا: $f(x)-(x+5)=6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

إذن: $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(x+5)\right]=\lim_{x\to-\infty}6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=Ln1=0$

ومنه: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

دراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-(x+5)\right]$: لدينا :

$f(x)-(x+5)=6Ln\frac{x}{x-1}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ يكون لدينا $x>x-1$.

ومنه $\frac{x}{x-1}<1$ لأن $(x-1)$ عدد سالب بالقسمة عليه تتغير المتباينة ومنه: $Ln\frac{x}{x-1}<Ln1$ وبالتالي $f(x)-(x+5)<0$ أي أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[$.

4 إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$:

لدينا الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و المجال $]-3,5;-3,4[\subset]-\infty;-2]$ فالدالة f مستمرة و رتيبة تماما عليه :

و $f(-3,5)=-3,5+5+6\ln\left(\frac{3,5}{4,5}\right)\approx-0,007$

و $f(-3,4)=-3,4+5+6\ln\left(\frac{3,4}{4,4}\right)\approx0,053$

وبالتالي $f(-3,5)\times f(-3,4)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل α حيث: $-3,5<\alpha<-3,4$.

من جهة أخرى دالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]-2;0[$ و المجال $]-1,1;-1[\subset]-2;0[$ فالدالة f مستمرة و رتيبة تماما عليه.

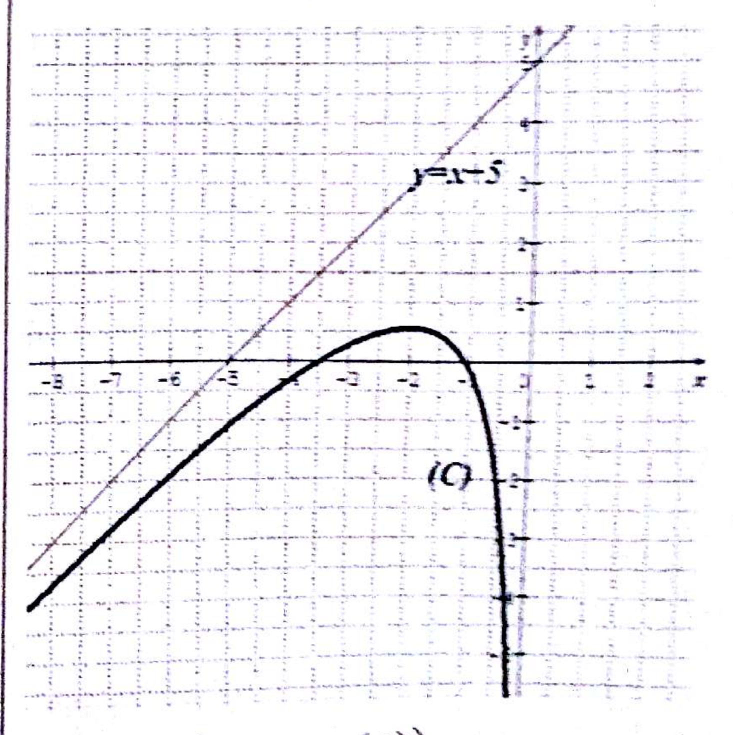
و $f(-1,1)=-1,1+5+6\ln\left(\frac{1,1}{2,1}\right)\approx 0,02$

و $f(-1)=-1+5+6\ln\left(\frac{1}{2}\right)\approx -0,158$

وبالتالي $f(-1,1)\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل β حيث: $-1,1<\beta<-1$.

وعليه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$.

5 إنشاء المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):



6 أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

إثبات أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB):

نعتبر النقطة $M(x,y)$ نقطة من المستقيم (AB) ومنه: $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AM}$.

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3-6Ln\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AM}$ يعني أن:

$$(x+1)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(y-3-6Ln\frac{3}{4}\right)(-1)=0$$

$$-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+y-3-6Ln\frac{3}{4}=0$$

$$-\frac{1}{2}x+y-\frac{7}{2}-6Ln\frac{3}{4}=0$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$$

و بالتالي المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) هي:

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}.$$

ب- إثبات أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0: المستقيم (AB) مماس للمنحنى (C_f) يعني أن لهما نفس معامل التوجيه أي $f'(x)=\frac{1}{2}$

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تعني أن: $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$

أي: $2x^2-2x-12=x^2-x$ وبالتالي: $x^2-x-12=0$

التمرين 14:

I) لتكن g الدالة المعرفة على R كما يلي: $g(x)=1-xe^x$.

1 أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2 ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3 أ- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- تحقق أن $0,5<\alpha<0,6$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^x-x-1$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❶ أحسب $\lim_{n\to-\infty} f(x)$.

❷ لتكن f' مشتقة الدالة f ، بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن: $f'(x)=-g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

❸ بيّن أن $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

❹ أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❺ أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1,6<x_1<-1,5$ و $1,5<x_2<1,6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

حل التمرين 14 :

I) لتكن g الدالة المعرفة على R كما يلي: $g(x)=1-xe^x$.

❶ حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-xe^x\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-xe^x\right)=-\infty$$

❷ دراسة اتجاه تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها:

g دالة قابلة للاشتقاق على R ودالتها المشتقة هي g' حيث:

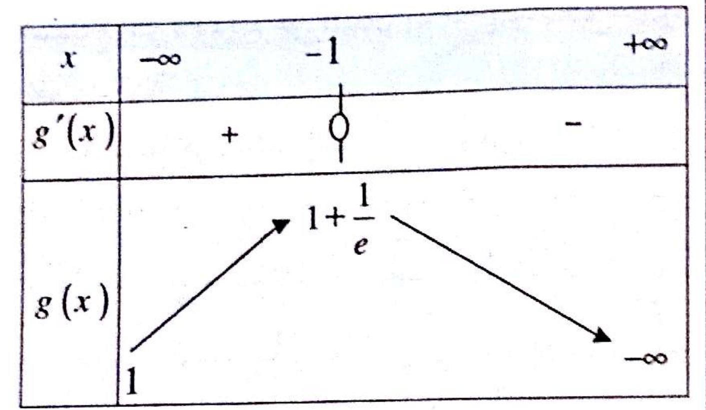
$g'(x)=-e^x-xe^x$

$g'(x)=(-1-x)e^x$

إشارة المشتقة من إشارة $-x-1$ لأنه من اجل كل عدد حقيقي: $e^x>0$.

لدينا $-1-x=0$ ومنه: $x=-1$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

جدول التغيرات:



❸ أ- إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-1;+\infty[$:

من جدول تغيرات الدالة نلاحظ أن g متناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-\infty;1+\frac{1}{e}\right]$ و العدد صفر ينتمي إلى $\left]-\infty;1+\frac{1}{e}\right]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-1;+\infty[$.

ب- التحقق أن $0,5<\alpha<0,6$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا: $g(0,6)=-0,09$ و $g(0,5)=0,18$ و بما أن $g(0,5)\times g(0,6)<0$ إذن $0,5<\alpha<0,6$.

إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	

II) ❶ حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x-x-1=+\infty$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=0$

❷ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$:

فإن $f'(x)=-g(x)$

f دالة قابلة للاشتقاق على $]-\infty;2]$ ودالتها المشتقة هي f'

حيث: $f'(x)=e^x+(x-1)e^x-1=(1+x-1)e^x-1$

$f'(x)=xe^x-1=-(-xe^x+1)$

$f'(x)=-g(x)$

استنتاج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f:

إشارة المشتقة هي عكس إشارة $g(x)$ وعليه:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة f'		$-$	0	$+$	

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$.

و f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	e^2-3

③ إثبات أن $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$: لدينا

$f(\alpha)=(\alpha-1)e^\alpha-\alpha-1$.

من جهة أخرى لدينا $g(\alpha)=0$ أي: $1-\alpha e^\alpha=0$

وبالتالي: $e^\alpha=\frac{1}{\alpha}$

$$f(\alpha)=(\alpha-1)\frac{1}{\alpha}-\alpha-1$$

وعليه: $f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{\alpha}-\alpha-1=\frac{\alpha-1-\alpha^2-\alpha}{\alpha}$

$$f(\alpha)=\frac{-\alpha^2-1}{\alpha}=-\frac{\alpha^2+1}{\alpha}$$

بالتعويض نجد: $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}):

لدينا $0,5<\alpha<0,6$ ومنه $\frac{1}{0,6}<\alpha<\frac{1}{0,5}$ ....(1)

ومن جهة أخرى $0,25<\alpha^2<0,36$ أي $1,25<\alpha^2+1<1,36$

أي: $-1,36<-(\alpha^2+1)<-1,25$

ومنه: $-\frac{1,36}{0,5}<-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)<-\frac{1,25}{0,6}$

إذن: $-2,72<f(\alpha)<-2,08$.

④ أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا: $f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x$

إذن: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=0$

ومنه $(\Delta): y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

دراسة إشارة الفرق $[f(x)-(-x-1)]$:

لدينا: $f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x$ إشارة الفرق من إشارة $(x-1)$.

على المجال $]-\infty;1[$ يكون لدينا $f(x)-(-x-1)<0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) وعلى المجال $]1;2]$ يكون لدينا $f(x)-(-x-1)>0$ وبالتالي المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ).

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $M(1;-2)$.

⑤ أ- إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1,6<x_1<-1,5$ و $1,5<x_2<1,6$

لدينا: $f(-1,6)=0,08$ و $f(-1,5)=-0,06$

f متناقصة تماما على المجال $[-1,6;-1,5]$

و $f(-1,5)\times f(-1,6)<0$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_1 حيث: $-1,6<x_1<-1,5$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

* لدينا $f(1,6) = 0,37$ و $f(1,5) = -0,26$

f متناقصة تماما على المجال $[1,5;1,6]$

و $f(1,5) \times f(1,6) < 0$

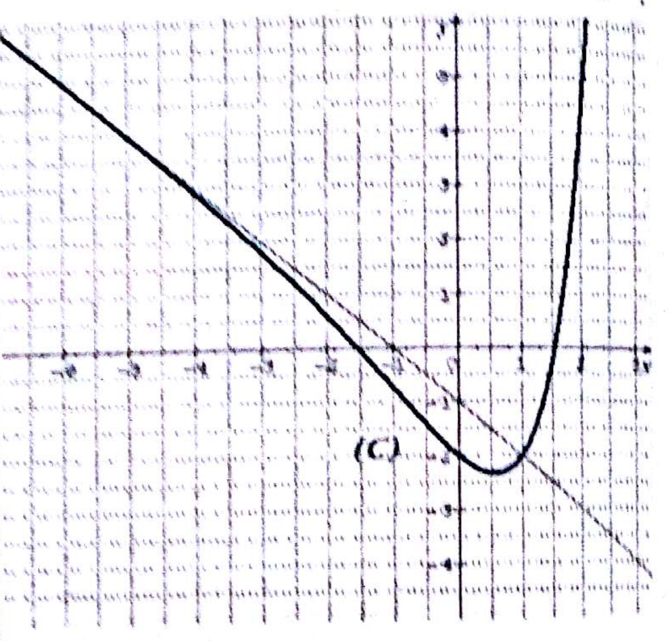
إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_2 حيث

$1,5 < x_2 < 1,6$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة ومنه نستنتج

أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين هما

$M_1(x_1;0)$ و $M_2(x_2;0)$.

ب- إنشاء (Δ) و (C_f):



التمرين 15 :

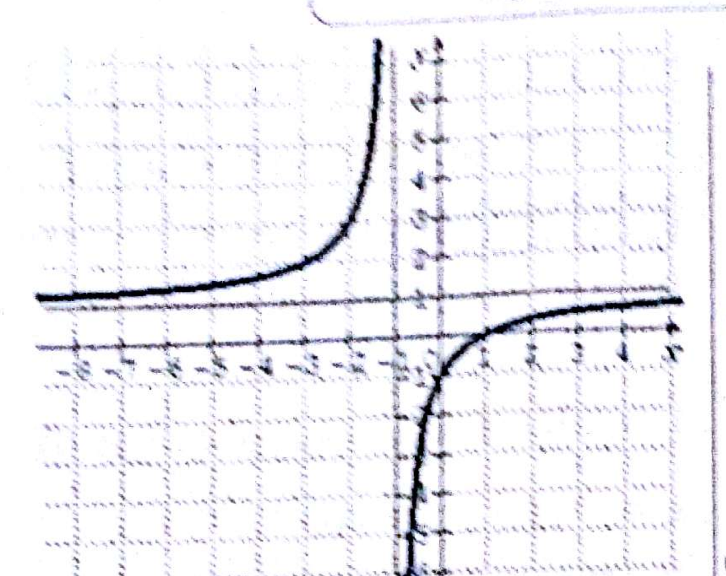
I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $R - \{-1\}$ كما يلي : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

كما يوضحه الشكل المقابل.

أ. شكل جدول تغيرات الدالة g.

ب. حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$.

ج. عين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$



II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \to 1} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$، فسر النتيجتين هندسيا.

2. أ.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

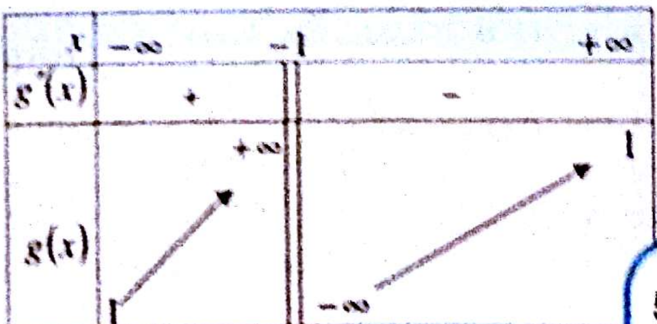
$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ب. أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. أ. باستعمال الجزء I) السؤال ج. عين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

حل التمرين 15 :

I) أ. تشكيل جدول تغيرات الدالة g :



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	‖	−
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

ب. حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$:

الحل البياني للمتراجحة $g(x)>0$ هو :

$x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

ج. تعيين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$:

من البيان $0<g(x)<1$ لما : $x\in]1;+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)$

و تفسير النتيجتين هندسيا :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=1$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$$

التفسير البياني :

$x=1$ مستقيم مقارب عمودي يوازي (yy') بجوار $(-\infty)$.

$y=1$ مستقيم مقارب أفقي يوازي (xx') .

2. أ. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

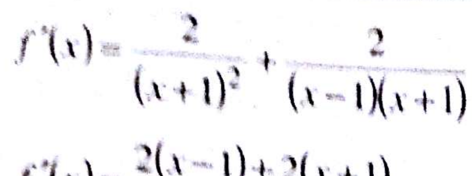
الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

ب. حساب f' و دراسة إشارتها :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$



$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

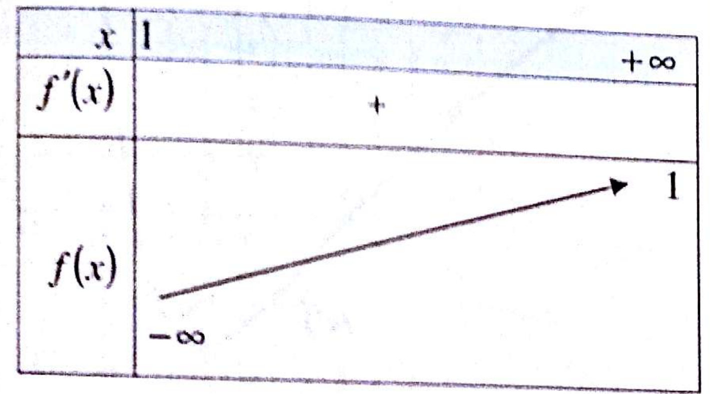
$$f'(x)=\frac{2(x-1)+2(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$

دراسة إشارة المشتقة : بما أن $x>1$ فإن :

$x-1>0$ و $\frac{4x}{(x+1)^2}>0$ و عليه من أجل كل x من $]1,+\infty[$:

$f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :



x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 1

3. تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$:

مما سبق من أجل $x>1$ لدينا : $0<\frac{x-1}{x+1}<1$

و نعلم أن $\ln a<0$ لما $a\in]0,1[$ و بالتالي :

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<0$ و بالتالي إشارة العبارة سالبة.

التمرين 16:

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x)$.

2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها .

3) عين فاصلة النقطة (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = \ln(x+a)+b$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبرية $\ln$ ثم ارسم (C) و (C_f) .

II) نعتبر الدالة g العددية المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = f(x)-x$.

1) احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)$ ثم بين أن : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) أحسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ حلا وحيدا α . تحقق أن : $2 < \alpha < 3$.

ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2}, 5\right]$ في المعلم السابق .

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1, \alpha[$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1, \alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N^* كما يلي : $u_n = f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$.

2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

حل التمرين 16 :

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على I و لدينا : $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$

و عليه $f'(x) > 0$ في I إذن f متزايدة تماما.

على المجال I ، و يكون جدول تغيراتها كما يلي :

x	$\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) كي يكون المماس موازيا للمنصف الأول يجب أن يتحقق ما يلي : $f'(x_0) = 1$ حيث : x_0 فاصلة النقطة المطلوبة .

لدينا : $f'(x_0) = 1$ تعني $\frac{2}{2x_0 - 1} = 1$ أي $x_0 = \frac{3}{2}$

4) أ) لدينا من أجل كل x من I :

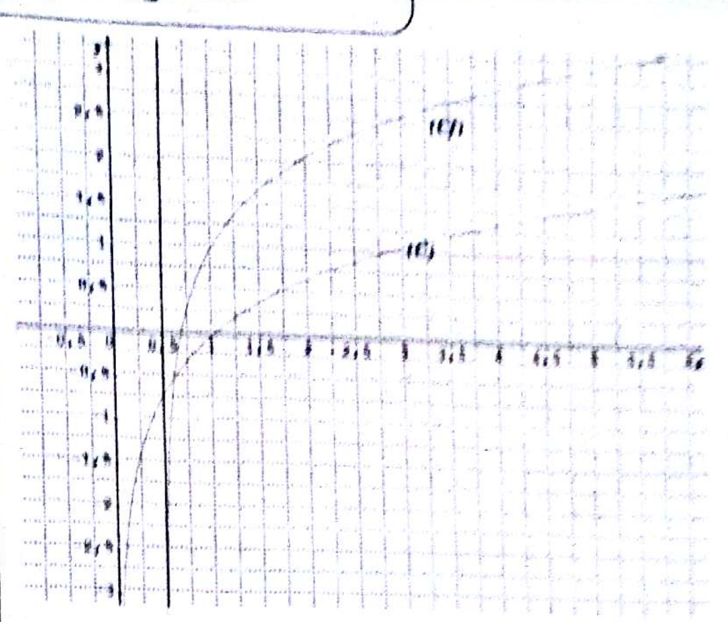
$$f(x) = 1 + \ln(2x-1) = 1 + \ln 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 + \ln 2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) = \ln(2e) + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

و منه : $a = -\frac{1}{2}$ و $b = \ln 2e$

ب) حسب الكتابة $f(x) = \ln(x+a)+b$ فإن (C_f) هو صورة (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\left(\frac{1}{2}, \ln 2e\right)$

و بالتالي يكون رسم (C) و (C_f) حيث : $\ln 2e \approx 1{,}7$



II)1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} 1 + \ln(2x-1) - x = -\infty$

و بالتالي يكون رسم (C) و (C_f) حيث : $\ln 2e \approx 1{,}7$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \ln(2x-1) - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + x\left(\frac{\ln(2x-1)}{x} - 1\right) = -\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{x} = 0$

2) الدالة g تقبل الاشتقاق على I و لدينا :

$$g'(x) = \frac{-2x+3}{2x-1}$$

$g'(x) = 0$ تعني $x = \frac{3}{2}$ حيث : $g'(x) > 0$ لما $x < \frac{3}{2}$

و $g'(x) < 0$ لما $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

و منه جدول تغير الدالة g يكون كما يلي :

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{1}{2} + \ln 2$	↘ $-\infty$

3) $g(1) = 0$ الدالة g رتيبة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

و بالتالي صورة المجال $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ بالدالة g هي المجال

$\left]-\infty, -\frac{1}{2} + \ln 2\right[$.

و بما أن $-\frac{1}{2} + \ln 2 > 0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة

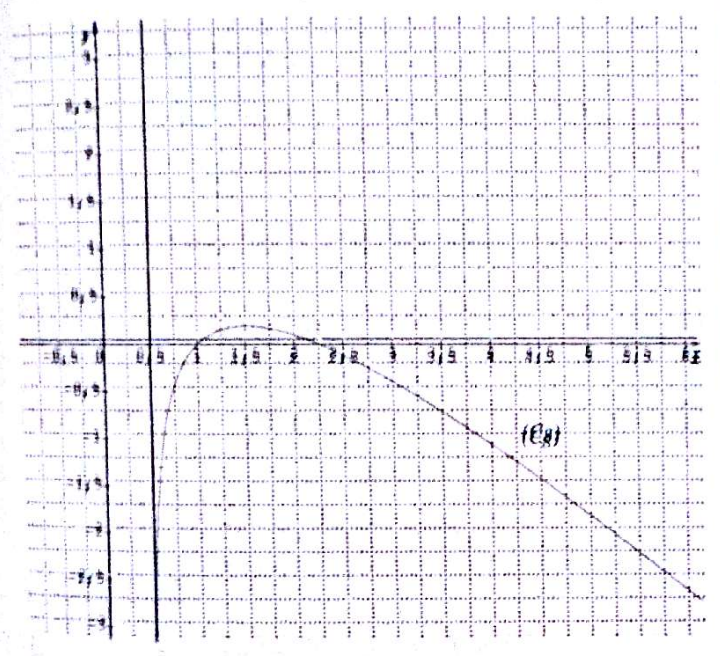
يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

بحيث $g(\alpha) = 0$ ، الدالة g رتيبة تماما على المجال $]2, 3[$

ولدينا $g(2)g(3) < 0$ و بما أن α وحيد فهذا يعني :

أن $2 < \alpha < 3$

ب) رسم (C_g) :



4) حسب البيان فإن $g(x) \geq 0$ لما $x \in [1, \alpha]$

و $g(x) \leq 0$ لما $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \cup [\alpha, +\infty[$

تتحدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (d) بدراسة إشارة الفرق $f(x) - x$ أي $g(x)$ و كما هو موضح سابقا فإن في المجال $[1, \alpha]$ يكون (C_f) تحت (d) و في المجال $\left]\frac{1}{2}, 1\right] \cup [\alpha, +\infty[$ يكون (C_f) فوق (d) .

5) الدالة f متزايدة تماما على $[1,\alpha]$ و بالتالي من أجل $1\leq x\leq\alpha$ نجد $f(1)\leq f(x)\leq f(\alpha)$ و لكن :

$f(1)=1$ و $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$

لأن : $g(\alpha)=0$ و منه $1\leq f(x)\leq\alpha$

III) 1) لدينا $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

و بالتالي : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ تعني

$$1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+2\ln 3-3\ln 2$$

أي $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{9}{8}$ أي $n=8$

2) $S_n=u_1+u_2+....+u_n=1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times1}\right)$

$$+1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times2}\right)+....+1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times n}\right)$$

$$=n+\ln\left(\frac{3}{2\times1}\right)+\ln\left(\frac{5}{2\times2}\right)+...+\ln\left(\frac{2n+1}{2\times n}\right)$$

$$=n+\ln\frac{3\times5\times7\times...\times(2n+1)}{2^2\times1\times2\times3\times...\times n}$$

$$S_n=n+\ln\frac{3\times5\times7\times...\times(2n+1)\times2\times4\times6\times...\times2n}{2^n\times(1\times2\times3\times...\times n)^2\times2^n}$$

$$=n+\ln\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

التمرين 17 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R^* كما يلي :

$f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$ نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) احسب $\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$

وفسر هندسيا النتيجة .

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=x+1$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و(Δ').

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث :

$\ln2<\alpha<1$ و $-1{,}4<\beta<-1{,}3$.

ب) هل توجد مماسات لـ: (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

ج) ارسم (Δ) و (Δ') و (C_f) .

حل التمرين 17 :

1) أ) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ب) $\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=+\infty$

هذا يعني أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على مجالي تعريفها و لدينا :

$f'(x)=1+\frac{e^x(e^x)}{(e^x-1)^2}$ و عليه $f'(x)>0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على مجالي تعريفها و يكون جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3) أ) لدينا $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}-1}=0$

يعني أن (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ و لدينا أيضا:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x-1)=\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{1}{e^{x}-1}\right)=0$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$ مما يعني أن (Δ') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب) وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$ أي $\frac{-1}{e^{x}-1}$.

الجدول الموالي يوضح إشارة $-\frac{1}{e^{x}-1}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\frac{1}{e^{x}-1}$	+	‖	-

إذن في المجال $]-\infty,0[$ يكون (C_f) فوق (Δ) و في المجال $]0,+\infty[$ يكون (C_f) تحت (Δ) .

وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ') ندرس الفرق $f(x)-x-1$ أي دراسة إشارة $\frac{-e^{x}}{e^{x}-1}$ و عليه :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}$	+	‖	-

إذن في المجال $]-\infty,0[$ و في المجال يكون (C_f) فوق (Δ') و في المجال $]0,+\infty[$ يكون (C_f) تحت (Δ') .

4) حتى تكون النقطة $\omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر (C_f) يجب تحقق ما يلي : مجموعة التعريف تكون متناظرة بالنسبة إلى العدد 0 ، و هو محقق ، و من أجل كل x من R^* :

$$f(-x)+f(x)=2\times\frac{1}{2}=1$$

لدينا :

$$f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^{x}-1}$$

$$f(-x)+f(x)=-\frac{e^{x}}{1-e^{x}}-\frac{1}{e^{x}-1}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\frac{1}{e^{x}-1}=1$$

مما يعني أن النقطة $\omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر (C_f).

5) أ) الدالة f رتيبة تماما على المجال $[\ln 2,1]$ و لدينا : $f(1)f(\ln 2)<0$ لأن $f(1)\approx 0{,}42$ و $f(\ln 2)\approx -0{,}31$ و حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد من المجال $[\ln 2,1]$ بحيث : $f(\alpha)=0$ و بنفس الطريقة نثبت وجود العدد الحقيقي β من المجال $[-1{,}4,-1{,}3]$ بحيث : $f(\beta)=0$

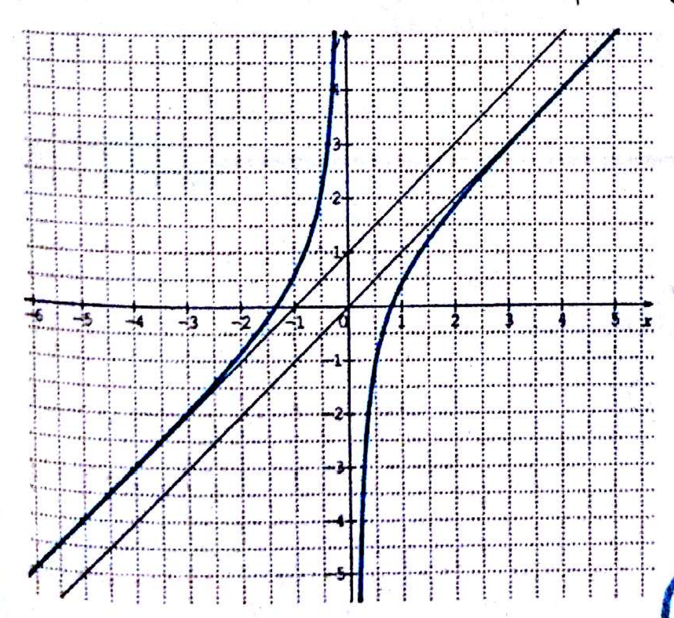
ب) مماسات (C_f) التي توازي المستقيم (Δ):

تحقق $f'(x)=1$ أي $1+\frac{e^{x}}{(e^{x}-1)^2}=1$

أي $\frac{e^{x}}{(e^{x}-1)^2}=0$ و هي معادلة ليست لها حلول في R^*

مما يعني أنه لا توجد مماسات توازي (Δ).

ج) الرسم :



التمرين 18 :

الجزء الأول :

h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$$

1) أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ و استنتج اتجاه تغير الدالة h

ثم أنجز جدول تغيراتها .

3) أحسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

الجزء الثاني :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة .

ب/ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ، برهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

جـ/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د/ أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين ان المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .



4) أرسم (C_f) .

حل التمرين 18 :

الجزء الأول :

h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$$

1) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$]-1;+\infty[: h'(x)=2x+2+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $h'(x)\succ 0$: $]-1;+\infty[$.

ومنه الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة h :

قيم x	-1	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) $h(0)=0$

ومنه :

قيم x	-1	0	$+\infty$
إشارة $h(x)$	−	0	+

الجزء الثاني :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

1) أ/ $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=+\infty$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته : $x=-1$

ب/ إثبات أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

بوضع : $\ln x = X$ فإن : $x=e^X$

لما : $x \to +\infty$ فإن : $X \to +\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^X}{X}}=0$

جـ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

د/

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$$

ومنه يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) معادلته :

$y=x-1$.

هـ) ندرس إشارة : $f(x)-(x-1)$:

$$f(x)-(x-1)=-\frac{\ln(x+1)}{x-1}$$

قيم x	-1	0	$+\infty$
إشارة : $\ln(x-1)$	$-$	0	$+$
إشارة : $x-1$	$+$		$+$
إشارة : $f(x)-(x-1)$	$+$	0	$-$

لما $x\in]-1;0[$ فإن (C_f) يقع فوق المقارب المائل .

لما $x\in]0;+\infty[$ فإن (C_f) يقع تحت المقارب المائل .

لما $x=0$ فإن (C_f) يقطع المقارب المائل .

2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=1-\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

جدول تغيرات f :

قيم x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

3) نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة f مستمرة و متزايدة على $[3,3;3,4]$

و $f(3,3)=1,96$ و $f(3,4)=2,06$

أي : $f(3,3)\prec f(2)\prec f(3,4)$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4) إنشاء (C_f) :

التمرين 19 :

1 h دالة معرفة على R كما يلي: $h(x)=e^{x}-2x$

أ/ أحسب نهايات الدالة h عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب/ أدرس تغيرات الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$e^{x}-2x\geq 2(1-\ln 2)$$

2 g دالة معرفة على R كما يلي: $g(x)=x.e^{x}-2e^{x}+2$

أ/ علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ فأثبت أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}x.e^{x}=0$

(يمكن وضع : $t=-x$) .

ثم استنتج نهاية الدالة g عند $-\infty$.

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$g(x)=e^{x}.(x-2+2e^{-x})$ ثم أحسب نهاية الدالة g عند $+\infty$.

جـ/ أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

د/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,5<\alpha<1,7$.

هـ/ أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من R .

3 f الدالة المعرفة على R كما يلي : $f(x)=\dfrac{-e^{x}+4x-2}{e^{x}-2x}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، وحدة الطول هي $2cm$.

أ/ أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ وفسر النتائج بيانيا .

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$f'(x)=\dfrac{-2.g(x)}{(e^{x}-2x)^{2}}$ ثم أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

جـ/ • عين إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-2$ ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ) .

• عين إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ') الذي معادلته $y=-1$ ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ') .

د/ بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{-2\alpha+3}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

هـ/ أنشئ (C) .

و/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m بيانيا عدد و إشارة حلول المعادلة :

$$(m+1)e^{x}-2(m+2).x+2=0$$

حل التمرين 19 :

1 h دالة معرفة على R كما يلي: $h(x)=e^{x}-2x$

أ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^{x}}{x}-2\right)$

$=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty$

ب/ من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $h'(x)=e^{x}-2$

ومنه: h متزايدة على المجال $[\ln 2;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty;\ln 2]$

جدول التغيرات:

قيم x	$-\infty$ $\ln 2$ $+\infty$
إشارة $h'(x)$	$-$ 0 $+$
$h(x)$	$+\infty$ ↘ $2-2\ln 2$ ↗ $+\infty$

جـ/ نلاحظ من تغيرات الدالة h أن للدالة قيمة حدية صغرى وتساوي $2-2\ln 2$ لما $x=\ln 2$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$h(x)\geq 2(1-\ln 2)$ أي $e^{x}-2x\geq 2(1-\ln 2)$

❷ g دالة معرفة على R كما يلي: $g(x)=x.e^{x}-2e^{x}+2$

أ/ إثبات أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^{x}=0$

نضع $t=-x$ ومنه $x=-t$

لما $x\to-\infty$ فإن $t\to+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^{x}=\lim\limits_{t\to+\infty} -t.e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty} -\dfrac{t}{e^{t}}=0$

(لأن $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{t}}{t}=+\infty$)

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x.e^{x}-2e^{x}+2\right)=2$

ب/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$g(x)=x.e^{x}-2e^{x}+2=e^{x}.\left(x-2+2e^{-x}\right)$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

جـ/ من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x)=e^{x}(x-1)$

ومنه: g متزايدة على المجال $]1;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty;1]$

جدول التغيرات:

قيم x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	↘	$2-e$	↗	$+\infty$

د/ نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[1.5;1.7]$

و $g(1.5)=-0.2$ و $g(1.7)=0.3$ أي $(1.5)\times g(1.7)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,5<\alpha<1,7$

هـ/ $g(0)=0$

قيم x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

❸ f الدالة المعرفة على R كما يلي : $f(x)=\dfrac{-e^{x}+4x-2}{e^{x}-2x}$

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ ومنه (C) يقبل مستقيمين مقاربين معادلاتاهما $y=-2$ و $y=-1$

ب/ من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=\dfrac{-2.g(x)}{\left(e^{x}-2x\right)^{2}}$

قيم x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

جدول التغيرات:

قيم x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↘	-3	↗	$f(\alpha)$	↘	-1

جـ/ $\dfrac{-e^{x}+4x-2}{e^{x}-2x}=-2$ ومنه $e^{x}-2=0$

ومنه $x=\ln 2$

ومنه إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-2$ هي: $(\ln 2;-2)$

$\frac{-e^x+4x-2}{e^x-2x}=-1$ ومنه $2x-2=0$ ومنه $x=1$

ومنه إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ') الذي معادلته $y=-1$ هي: $(1;-1)$

دراسة وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ): $f(x)-y=\frac{e^x-2}{e^x-2x}$

قيم x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
إشارة e^x-2	$-$	0	$+$
إشارة e^x-2x	$+$		$+$
إشارة $f(x)-y$	$-$	0	$+$
وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ)	تحت	يقطع	فوق

دراسة وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ'): $f(x)-y=\frac{2x-2}{e^x-2x}$

قيم x	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة $2x-2$	$-$	0	$+$
إشارة e^x-2x	$+$		$+$
إشارة $f(x)-y$	$-$	0	$+$
وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ')	تحت	يقطع	فوق

د/ $f(\alpha)=\frac{-e^\alpha+4\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha}$.......(1)

و $g(\alpha)=\alpha.e^\alpha-2e^\alpha+2=0$ ومنه $e^\alpha=\frac{-2}{\alpha-2}$

نعوض $e^\alpha=\frac{-2}{\alpha-2}$ في العلاقة (1) نجد:

$$f(\alpha)=\frac{-2\alpha+3}{\alpha-1}$$

حصر $f(\alpha)$: (باستعمال خواص الحصر نجد: $-0.8<f(\alpha)<0$)

لدينا: $1,5<\alpha<1,7$ ومنه: $-3>-2\alpha>-3.4$

ومنه: $0>-2\alpha+3>-0.4$

ومنه: $-0.4<-2\alpha+3<0$

لدينا: $1,5<\alpha<1,7$ ومنه: $0,5<\alpha-1<0,7$

ومنه: $\frac{1}{0.7}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{0.5}$ ومنه: $\frac{1}{0.7}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{0.5}$

لدينا: $-0.4<-2\alpha+3<0$

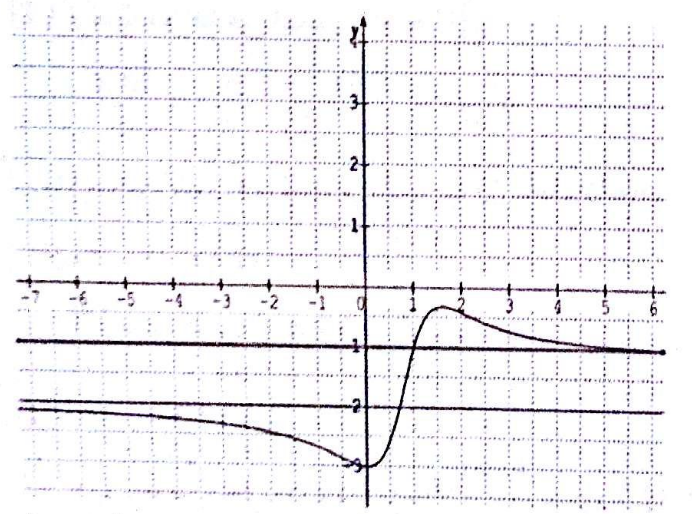
ومنه $0<-(-2\alpha+3)<0.4$

ولدينا: $\frac{1}{0.7}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{0.5}$

ومنه: $\frac{0}{0.7}<\frac{-(-2\alpha+3)}{\alpha-1}<\frac{0.4}{0.5}$

ومنه: $-0.8<f(\alpha)<0$

هـ/ إنشاء (C):



و/ المناقشة البيانية: $(m+1)e^x-2(m+2).x+2=0$:

لدينا: $(m+1)e^x-2(m+2).x+2=0$

أي: $m.e^x+e^x-2m.x-4x+2=0$

ومنه: $m.(e^x-2x)=-e^x+4x-2$

ومنه: $m=\frac{-e^x+4x-2}{e^x-2x}$

ومنه $f(x)=m$ و حلول المعادلة $f(x)=m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C) والمستقيم الذي معادلته $y=m$

لـ $m\in]-\infty;-3[$ المعادلة لا تقبل حلولا.

لـ $m=-3$ المعادلة تقبل حلا معدوما

لـ $m\in]-3;-1[$ المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة.

لـ $m\in[-1;0]$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.

لـ $m\in]0;f(\alpha)[$ المعادلة تقبل حلان موجبان تماما.

لـ $m=f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.

لـ $m\in]f(\alpha);+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلولا.

التمرين 20:

I) h دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$h(x)=3-3x^2-2\ln x$$

1- عين نهايتي h عند 0 و عند $+\infty$.

2- أدرس اتجاه تغير الدالة h

3- أحسب $h(1)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) f دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{-3x^2-1+x}{2x}+\frac{\ln x}{x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ فسر النتيجة هندسيا.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- أ) بين انه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{h(x)}{2x^2}$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

ب) أنجز جدول تغيرات الدالة f.

3- أ) بين أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب لـ (C_f).

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T).

4- ارسم (T) و (C_f).

حل التمرين 20 :

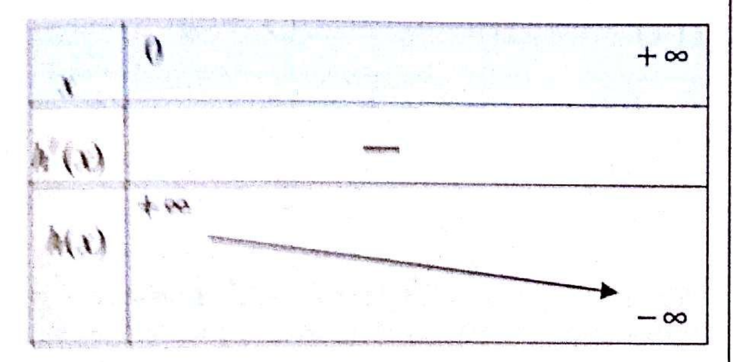
I) نعتبر: $h(x)=3-3x^2-2\ln x$ و $D_h=]0;+\infty[$

1- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$

2- اتجاه تغير الدالة h : الدالة h قابلة الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا :

$$h'(x)=-6x^2-\frac{2}{x}=\frac{-2(3x^2+1)}{x}$$

بما أن $h'(x)<0$ فالدالة h متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.



x	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3- $h(1)=0$ إشارة $h(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر: $f(x)=\frac{-3x^2-1+x}{2x}+\frac{\ln x}{x}$

حيث $D_f=]0;+\infty[$

1- أ) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2- أ) الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا :

$$f'(x)=\frac{(-6x+1)(2x)-2(-3x^2+x-1)}{4x^2}+\frac{\frac{1}{x}(x)-\ln x}{x^2}$$

أي $f'(x) = \frac{-6x^2+2}{4x^2} + \frac{4-4\ln x}{4x^2}$ أي

$$f'(x) = \frac{-6x^2+6-4\ln x}{4x^2}$$

$$= \frac{-3x^2+3-2\ln x}{2x^2} = \frac{h(x)}{2x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $h(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

ب) جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

3- أ) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2})) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}))=\lim_{x\to+\infty}(\frac{-1}{2x}+\frac{\ln x}{x})=0$$

ومنه (T) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

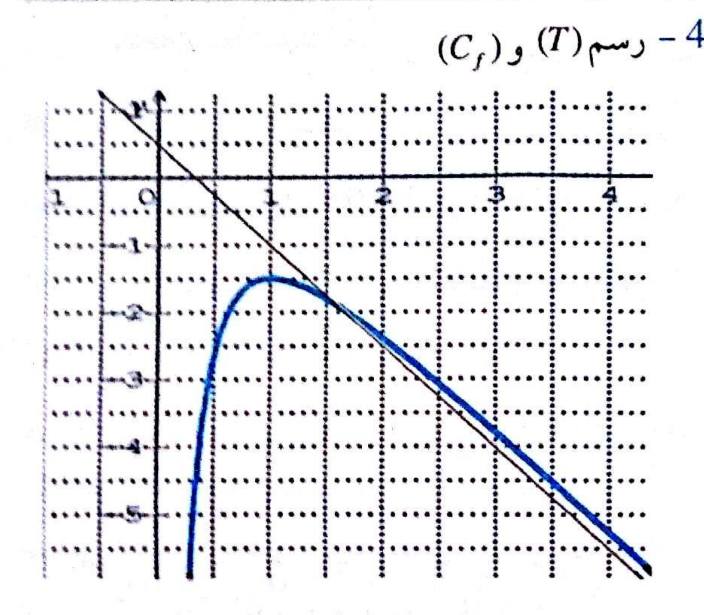
ب) الوضعية : لدينا $f(x) - y = -\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$

$\frac{-1+2\ln x}{2x} = 0$ تكافئ $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ ومنه (C_f) يقطع (T) في النقطة $(\sqrt{e}; f(\sqrt{e}))$ حيث :

$$f(\sqrt{e}) = \frac{1-3\sqrt{e}}{2}$$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x)-y=-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) يقع تحت (D)		(C_f) يقع فوق (D)

4- رسم (T) و (C_f)



الهندسة الفضائية

■ الجداء السلمي في الفضاء:

الجداء السلمي لشعاعين : ($\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$)

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء ، توجد ثلاث نقاط من الفضاء

$A;B;C$ حيث : $\vec{AB} = \vec{u}$ و $\vec{AC} = \vec{v}$ أي

يوجد مستو(P) يشمل النقط $A;B;C$ ومنه الجداء السلمي

للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء هو نفسه الجداء

السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في المستوى (P) ولدينا الجداء

السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هوا لعدد الحقيقي:

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) \text{ و } \vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2$$

إذا كان : ■ $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$

■ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ بحيث : ($\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$)

فإن : $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \vec{0}$ نقول أن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

خواص : ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أشعة و k عدد حقيقي .

■ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

■ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2.\vec{u}.\vec{v}$

■ $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

■ $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2.\vec{u}.\vec{v}$

■ $\vec{u}.\left(k.\vec{v}\right) = k.\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$

■ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

العبارة التحليلية للجداء السلمي :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

و $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ فإن :

$$\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$$

طويلة شعاع :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

و $\vec{u}(x,y,z)$ فإن: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

المسافة بين نقطتين :

$A(x,y,z)$ و $B(x',y',z')$ فإن:

$$AB = \left\|\vec{AB}\right\| = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

معادلة سطح كرة :

لتكن (C) كرة مركزها $\omega(x_0,y_0,z_0)$ و نصف قطرها r حيث $(r>0)$.

ومن أجل كل نقطة $M(x,y,z)$ من (C)

(c,r)

فإن : $\omega M = r$

ومنه: $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r$

أي معادلة (C) هي :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

● طبيعة المجموعة (C) للنقط $M(x,y,z)$ حيث:

$$x^2+y^2+z^2+a.x+b.y+c.z+d=0$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2+d=0$$

ومنه: $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d$

ومنه: $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

إذا كان: $a^2+b^2+c^2-4d>0$ فإن:

(C) معادلة سطح كرة مركزها $\omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$

ونصف قطرها $r=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}}$

إذا كان: $a^2+b^2+c^2-4d=0$

فإن: (C) هي نقطة $\omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$

إذا كان: $a^2+b^2+c^2-4d<0$ فإن (C) هي مجموعة خالية .

تمرين تطبيقي

ما طبيعة مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة:
$x^2+y^2+z^2+4.x-2.y+6.z+1=0$

الحل

لدينا: $x^2+y^2+z^2+4.x-2.y+6.z+1=0$

ومنه: $\left(x+\frac{4}{2}\right)^2+\left(y-\frac{2}{2}\right)^2+\left(z+\frac{6}{2}\right)^2-(2)^2-(1)^2-(3)^2+1=0$

ومنه: $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$

عبارة عن جميع نقاط سطح كرة مركزها $\omega(-2,1,-3)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{13}$

المستقيمات و المستويات في الفضاء :

المستقيم في الفضاء :

1) التمثيل الوسيطي لمستقيم يشمل نقطتين :

مثال : (Δ) مستقيم يشمل النقطتين $A(2,-2,3)$ و $B(-1,2,-1)$

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطتين A و B

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (Δ) فإن : $\overrightarrow{AM}=\lambda.\overrightarrow{AB}$ حيث $(\lambda\in R)$

حيث: $\overrightarrow{AM}(x-2;y+2;z-3)$ و $\overrightarrow{AB}(-3;4;-4)$

ومنه : $\begin{cases}x-2=-3.\lambda\\y+2=4.\lambda\\z-3=-4.\lambda\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=-3.\lambda+2\\y=4.\lambda-2\\z=-4.\lambda+3\end{cases}$

2) التمثيل الوسيطي لمستقيم يشمل نقطة ويوازي شعاع غير معدوم :

مثال : (Δ) مستقيم يشمل النقطة $A(5,-2,1)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(1,3,4)$

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ويوازي الشعاع $\vec{u}$

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (Δ) فإن : $\overrightarrow{AM}=\lambda.\vec{u}$ حيث $(\lambda\in R)$:

ومنه : $\begin{cases} x-5=\lambda \\ y+2=3.\lambda \\ z-1=4.\lambda \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=\lambda+5 \\ y=3.\lambda-2 \\ z=4.\lambda+1 \end{cases}$

ملاحظة : كل شعاع يوازي مستقيم هو شعاع توجيه له .

✓ المستوى في الفضاء :

1) التمثيل الوسيطي لمستو يشمل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة :

مثال : (P) مستو يشمل النقط $A(0,1,-1)$ و $B(2,1,1)$ و $C(5,0,3)$

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا لمستو يشمل ثلاث نقط A,B,C ليست على إستقامية.

نتحقق أن النقط A,B,C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة .

نثبت أنه لا يوجد عدد حقيقي λ حيث: $\overrightarrow{AB}=\lambda.\overrightarrow{AC}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(2;0;2)$ و $\overrightarrow{AC}(5;-1;4)$

أي : $\begin{cases} 2=5.\lambda \\ 0=-\lambda \\ 2=4.\lambda \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} \lambda=\frac{2}{5} \\ \lambda=0 \\ \lambda=\frac{1}{2} \end{cases}$

مستحيل ، ومنه النقط A,B,C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة .

ومنه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ أساس للمستوي (P) .

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (P) فإن :

$\overrightarrow{AM}=\alpha.\overrightarrow{AB}+\beta.\overrightarrow{AC}$ (حيث: $\alpha\in R$ و $\beta\in R$)

ومنه : $\begin{cases} x=2\alpha+5\beta \\ y-1=0.\alpha-\beta \\ z+1=2\alpha+4\beta \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=2\alpha+5\beta \\ y=-\beta+1 \\ z=2\alpha+4\beta-1 \end{cases}$

2) التمثيل الوسيطي لمستو يشمل نقطة وشعاعان يشكلان أساسا له :

مثال : (P) مستو يشمل النقط $A(2,1,-3)$ و $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ أساسا له حيث : $\vec{u}(1;0;2)$ و $\vec{v}(-1;2;3)$

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا لمستو يشمل النقطة A و $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ أساسا له

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (P) فإن: $\overrightarrow{AM}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$ (حيث : $\alpha\in R$ و $\beta\in R$)

ومنه : $\begin{cases} x-2=\alpha-\beta \\ y-1=0.\alpha+2.\beta \\ z+3=2\alpha+3\beta \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=\alpha-\beta+2 \\ y=2.\beta+1 \\ z=2\alpha+3\beta-3 \end{cases}$

3) المعادلة الديكارتية لمستو :

- **المعادلة الديكارتية لمستو يشمل نقطة ويعامد شعاع غير معدوم :**

مثال : (P) مستو يشمل النقط $A(3,2,-10)$ ويعامد الشعاع $\vec{u}(1;-5;7)$.

الهدف من هذا المثال تعيين معادلة ديكارتية لمستو يشمل النقطة A ويعامد الشعاع $\vec{u}$.

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (P) فإن : $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

ولدينا: $\overrightarrow{AM}(x-3;y-2;z+10)$

ومنه : $1.(x-3)-5.(y-2)+7.(z+10)=0$

ومنه : $x-5y+7z+77=0$

- **المعادلة الديكارتية لمستو يشمل ثلاث نقط ليست على إستقامية:**

مثال : (P) يشمل النقط $A(1;1;3)$، $B(2;-4;0)$، $C(0;1;2)$.

نتحقق أن النقط A، B، C ليست على استقامة واحدة :

مع $\overrightarrow{AB}(1;-5;-3)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;-1)$ ولدينا:

$\frac{0}{-5} \neq \frac{-1}{1}$ معناه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا ومنه النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة ومنه النقط A ، B ، C تشكل مستو وحيد (P) أو (ABC).

تعين معادلة ديكارتية للمستوي (P) : (نبحث عن شعاعا ناظميا للمستوي (P) نفرض أن الشعاع $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) فإن: $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$

أي:
$$\begin{cases} a-5b-3c=0 \\ -a-c=0 \end{cases}$$

نفرض: $a=1$ ومنه فإن $c=-1$ ومنه فإن $b=\frac{4}{5}$

ومنه يكون الشعاع $\vec{n}\left(1;-1;\frac{4}{5}\right)$ شعاعا ناظميا للمستوى (P) ونلاحظ أيضا أن الشعاع : $\vec{n'}=5.\vec{n}$ شعاعا ناظميا للمستوى (P) لأن $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مرتبطان خطيا.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (P) فإن: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n'}=0$

حيث: $\overrightarrow{AM}(x-1;y-1;z-3)$ و $\vec{n'}(5;-5;4)$

ومنه: $(x-1).(5)+(y-1).(-5)+(z-3).(4)=0$

أي: $5x-5y+4z-12=0$ معادلة (P) الديكارتية.

ملاحظات :

- الشعاع العمودي لمستو يسمى شعاع ناظمي له .
- كل مستو له معادلة ديكارتية من الشكل $a.x+b.y+c.z+d=0$ و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظم له.
- المستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ معادلته من الشكل : $z=0$.
- المستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ معادلته من الشكل : $x=0$.
- المستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ معادلته من الشكل : $y=0$.

4) الانتقال من المعادلة الديكارتية لمستو إلى التمثيل الوسيطي له والعكس :

- **الانتقال من المعادلة الديكارتية لمستو إلى التمثيل الوسيطي له:**

(P) مستو معادلته الديكارتية من الشكل :
$$a.x+b.y+c.z+d=0$$

نفرض ثلاث نقط A ، B ، C من (P) ليست على استقامة واحدة فيكون $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ أساس للمستوي (P).

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (P) فإن :

$\overrightarrow{AM}=\alpha.\overrightarrow{AB}+\beta.\overrightarrow{AC}$ (حيث : $\alpha\in R$ و $\beta\in R$)

مثال : (P) مستو معادلته الديكارتية : $x+y-z+1=0$

الهدف هو إعطاء تمثيلا وسيطيا للمستوي (P).

لدينا: النقط A ، B ، C من (P) حيث:

$A(0;0;1)$ ، $B(0;-1;0)$ ، $C(-1;0;0)$

نتحقق أن النقط A,B,C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة .

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;-1)$ لدينا :

$\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{-1}$ ومنه النقط A,B,C ليست على استقامة واحدة .

ومنه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ أساس للمستوي (P) .

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (P) فإن :

$\overrightarrow{AM}=\alpha.\overrightarrow{AB}+\beta.\overrightarrow{AC}$ (حيث : $\alpha\in R$ و $\beta\in R$)

ومنه :
$$\begin{cases} x=0.\alpha-1.\beta \\ y=-1.\alpha+0.\beta \\ z-1=-1.\alpha-1.\beta \end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases} x=-\beta \\ y=-\alpha \\ z=-\alpha-\beta+1 \end{cases}$$

- **الانتقال من التمثيل الوسيطي لمستو إلى المعادلة الديكارتية له:**

مثال : (P) مستو تمثيله الوسيطي
$$\begin{cases} x=2\alpha+\beta-1 \\ y=-\alpha+3\beta+2 \\ z=\alpha-\beta \end{cases}$$
حيث : $\alpha\in R$ و $\beta\in R$

لاحظ أن : $\vec{u}(2;-1;1)$ و $\vec{v}(1;3;-1)$ أساسا له و $A(-1,2,0)$ نقطة منه .

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظم لـ (P) فإن : $\vec{n}.\vec{u}=0$ و $\vec{n}.\vec{v}=0$

ومنه : $\begin{cases}2a-b+c=0\\a+3b-c=0\end{cases}$ نفرض : $c=1$

فإن : $\begin{cases}2a-b+1=0.....(1)\\a+3b-1=0......(2)\end{cases}$ من (1) : $b=2a+1$

نعوض في (2) نحصل على : $a+3(2a+1)-1=0$

ومنه : $a=-\frac{2}{7}$ و $b=-\frac{3}{7}$

فيكون لدينا شعاعا ناظما للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(-1,2,0)$

وهكذا نكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) .

✓ **الأوضاع النسبية لمستقيمات ومستويات في الفضاء:**

1) الوضع النسبي لمستقيمين :

في الفضاء يكون المستقيمان (Δ) و (Δ') إما :

متوازيان (غير متطابقان أو متطابقان) ـ **متقاطعان ـ ليسا من نفس المستوي**

مثال : (Δ) و (Δ') مستقيمان تمثيلهما الوسيطي :

$$\begin{cases}x=\lambda+1\\y=-\lambda\\z=2\lambda+3\end{cases}(\lambda\in R) \text{ و } \begin{cases}x=-t+2\\y=3t\\z=-2t+1\end{cases}(t\in R)$$

لدينا : $\vec{u}(1;-1;2)$ شعاع توجيه (Δ) و $\vec{v}(-1;3;-2)$ شعاع توجيه (Δ')

ولدينا : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطيا لأن : $\frac{1}{-1}\neq\frac{-1}{3}$

ومنه:(Δ) و (Δ') **غير متوازيان .**

نعوض قيم x و y و z من $\begin{cases}x=\lambda+1\\y=-\lambda\\z=2\lambda+3\end{cases}$ في $\begin{cases}x=-t+2\\y=3t\\z=-2t+1\end{cases}$

نحصل على : $\begin{cases}\lambda+1=-t+2\\-\lambda=3t\\2\lambda+3=-2t+1\end{cases}$

أي : $\begin{cases}\lambda+t-1=0....(1)\\3t+\lambda=0.......(2)\\2\lambda+2t+2=0.....(3)\end{cases}$

من (2) : $\lambda=-3t$ نعوض في (1) و (3) نجد : $\begin{cases}t=\frac{-1}{2}\\t=\frac{1}{2}\end{cases}$

مستحيل ومنه (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

2) الوضع النسبي لمستويين :

في الفضاء يكون المستويان (P) و (P') إما : **متوازيان** (غير متطابقان أو متطابقان) ـ **متقاطعان في مستقيم .**

مثال: (P) مستو معادلته : $x-y+z-1=0$

و (P') مستو معادلته : $2x-2y+2z-5=0$

لدينا : $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي لـ (P)

و $\vec{n'}(2;-2;2)$ شعاع ناظمي لـ (P')

لاحظ أن : $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مرتبطان خطيا لأن : $\vec{n'}=2.\vec{n}$

ومنه : (P) و (P') متوازيان .

مثال: (P) مستو معادلته : $x-y+z-1=0$

و (P') مستو معادلته : $2x-3y+z-5=0$

لدينا : $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}(2;-3;1)$ شعاع ناظمي لـ (P')

لاحظ أن: $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطان خطيا لأن: $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-3}$

ومنه (P) و (P') متقاطعان في مستقيم (Δ).

ولدينا: $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ نضع: $z=\lambda$

ومنه: من (1): $x=y-\lambda+1$

نعوض في (2) نجد: $y=-\lambda+2$ ومنه: $x=-2\lambda+3$

ومنه التمثيل الوسيطي لـ (Δ): $\begin{cases} x=-2\lambda+3 \\ y=-\lambda+2 \\ z=\lambda \end{cases}$

حيث $\lambda \in R$

3) الوضع النسبي لمستقيم و مستوي:

في الفضاء يكون المستوي (P) والمستقيم (Δ)

إما: متوازيان. (Δ) محتوى في (P). (P) و (Δ) متقاطعان في نقطة.

ملاحظات:

- إذا كانت نقطتان من مستقيم (Δ) تنتميان لمستو (P) فإن $(\Delta)\subset(P)$.
- نفرض $\vec{n}$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) و $\vec{U}$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ):

إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{U}$ متعامدان فإن (Δ) يوازي (P).

إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{U}$ متوازيان فإن (Δ) يعامد (P).

المسافة بين نقطة ومستوي:

(P) مستو معادلته الديكارتية من الشكل $a.x+b.y+c.z+d=0$ و $A(x_A, y_A, z_A)$ فإن:

$$d((P),A)=\frac{|a.x_A+b.y_B+c.z_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

تمارين

في كل التمارين الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

التمرين 01:

1) (D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$\begin{cases} x=4-2t \\ y=2+4t \\ z=t \end{cases}$ و $\begin{cases} x=-2k \\ y=1+4k \\ z=k \end{cases}$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

بين أن (D) و (T) متوازيان.

2) (D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$\begin{cases} x=-3+t \\ y=t \\ z=1+3t \end{cases}$ و $\begin{cases} x=-1+k \\ y=2-2k \\ z=5+3k \end{cases}$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

بين أن (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

3) (D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$\begin{cases} x=-3+2t \\ y=2-t \\ z=1+t \end{cases}$ و $\begin{cases} x=k \\ y=1-k \\ z=-1+4k \end{cases}$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

بين أن (D) و (T) متقاطعان.

حل التمرين 01:

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (D)

و $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (T)

لدينا: $1=\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}=\frac{-2}{-2}$ إذن: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان.

ومنه المستقيمان (D) و (T) متوازيان.

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (T)

لدينا: $\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{1}$ إذن: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متوازيان.

ومنه: (D) و (T) ليسا متوازيان.

معناه (D) و (T) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

لدينا: $\begin{cases}x=-3+t\\y=t\\z=1+3t\end{cases}$ و $\begin{cases}x=-1+k\\y=2-2k\\z=5+3k\end{cases}$

نبحث عن نقطة تقاطع المستقيمان إن وجدت:

نضع: $\begin{cases}-3+t=-1+k\\t=2-2k\\1+3t=5+3k\end{cases}$

نعوض t من المعادلة 2 في كل من المعادلات 1 و 3

نحصل على:

$\begin{cases}-3+2-2k=-1+k\\ \\1+3(2-2k)=5+3k\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}0=3k\\ \\2=9k\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}0=k\\ \\ \frac{2}{9}=k\end{cases}$ وهذا تناقض.

نستنتج أن: (D) و (T) لا يتقاطعان ومنه (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (T)

لدينا: $\frac{-1}{-1}\neq\frac{2}{1}$ إذن: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متوازيان.

ومنه: (D) و (T) ليسا متوازيان.

معناه (D) و (T) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

لدينا: $\begin{cases}x=-3+2t\\y=2-t\\z=1+t\end{cases}$ و $\begin{cases}x=k\\y=1-k\\z=-1+4k\end{cases}$

نضع: $\begin{cases}-3+2t=k\\2-t=1-k\\1+t=-1+4k\end{cases}$ من المعادلة 2 لدينا: $t=1+k$

ثم نعوض t في كل من المعادلات 1 و 3 نحصل على:

$\begin{cases}-3+2(1+k)=k\\ \\1+1+k=-1+4k\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}1=k\\ \\1=k\end{cases}$ فتكون: $t=2$

من أجل $k=1$ نحصل على $\begin{cases}x=1\\y=1-1=0\\z=-1+4=3\end{cases}$

أو من أجل $t=2$ نحصل على: $\begin{cases}x=-3+2(2)=1\\y=2-2=0\\z=1+2=3\end{cases}$

نستنتج أن: (D) و (T) يتقاطعان في النقطة $A(1;0;3)$

التمرين 02:

في كل حالة من الحالات التالية عين تقاطع المستوي (P) والمستقيم (D)

1) $(P):-2x+y-z+3=0$ و $(D):\begin{cases}x=t\\y=-1+3t\\z=2+t\end{cases}$

2) $(P):x+3y-z+1=0$ و $(D):\begin{cases}x=1+3t\\y=-2-2t\\z=2\end{cases}$

3) $(P):x+y-2z+2=0$ و $(D):\begin{cases}x=5+t\\y=1+t\\z=4+t\end{cases}$

حل التمرين 02 :

نعوض x، y، z في معادلة المستوي (P) لنحصل على قيمة الوسيط t ثم نبحث عن إحداثيات نقطة التقاطع إذا وجدت.

أما إذا كانت المعادلة محققة من أجل كل عدد حقيقي t فإن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P) :

1) $\begin{cases} -2x+y-z+3=0 \\ x=t \\ y=-1+3t \\ z=2+t \end{cases}$

ومنه: $-2(t)+(-1+3t)-(2+t)+3=0$

أي: $-2t-1+3t-2-t+3=0$

أي: $0=0$ دائما محققة

نستنتج أن: (D) محتوى في المستوي (P)

ومنه $(D)\cap(P)=(D)$

2) $\begin{cases} x+3y-z+1=0 \\ x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=2 \end{cases}$

ومنه : $1+3t+3(-2-2t)-2+1=0$

أي $1+3t-6-6t-1=0$

أي $-3t=6$

أي $t=-2$

بالتعويض في معادلات (D): $\begin{cases} x=1+3(-2)=-5 \\ y=-2-2(-2)=2 \\ z=2 \end{cases}$

نستنتج أن: $(D)\cap(P)=\{A(-5;2;2)\}$

3) $\begin{cases} x+y-2z+2=0 \\ x=5+t \\ y=1+t \\ z=4+t \end{cases}$

ومنه $5+t+1+t-2(4+t)+2=0$

أي: $6+2t-8-2t+8=0$ أي: $6=0$ مستحيل

ومنه نستنتج أن : $(D)\cap(P)=\phi$

التمرين 03:

نعتبر المستقيمات الثلاثة (D3); (D2); (D1) حيث :

$$(D3)\quad \begin{cases} x-y-2z=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$$

$$(D2)\quad \begin{cases} x=5-4t' \\ y=-2t' \quad ;t'\in R \\ z=-1+2t' \end{cases}$$

$$(D1)\quad \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \quad ;t\in R \\ z=1-t \end{cases}$$

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D_3) .

2) بين أن المستقيمين (D_1) و (D2) متطابقان .

3) بين أن المستقيمين (D_1) و (D_3) ليس من نفس المستوي.

4) (Δ) مستقيم يمر من النقطة A (5 , -1 , 4) و شعاع توجيهه $\vec{u}\ (3,1,1)$. بين أن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثياتها.

حل التمرين 03 :

1) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D_3) :

نكتب x و y بدلالة z (z وسيط) .

لدينا : $\begin{cases} x-y-2z=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} x-y=2z \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

و عليه : $\begin{cases} 3x-3y=6z \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

بجمع المعادلتين نجد : $5x=6z$ و منه : $x=\frac{6}{5}z$

و بالتعويض في المعادلة $x-y=2z$ نجد :

$$y=x-2z=\frac{6}{5}z-2z=-\frac{4}{5}z$$

إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D_3) هو : $\lambda \in R$;

$$(D_3):\begin{cases} x = \frac{6}{5}\lambda \\ y = -\frac{4}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

2) إثبات أن المستقيمين (D_1) و (D2) متطابقان :

لدينا شعاع توجيه المستقيم (D_1) هو $\vec{n_1}(2,1,-1)$

و شعاع توجيه المستقيم (D2) هو $\vec{n_2}(-4,-2,2)$.

نلاحظ أن : $\vec{n_2} = -2\vec{n_1}$ و عليه فإن المستقيمين (D_1) و (D2) متوازيان.

من جهة أخرى النقطة A (1 , -2 , 1) تنتمي إلى (D_1) من أجل t = 0 و تنتمي إلى (D2) من أجل t' =1

و بالتالي المستقيمين (D_1) و (D2) متوازيان و لهما نقطة مشتركة و بالتالي فإن المستقيمين (D_1) و (D2) متطابقان.

3) إثبات أن المستقيمين (D_1) و (D_3) ليس من نفس المستوي :

لدينا شعاع توجيه المستقيم (D_1) هو $\vec{n_1}(2,1,-1)$

و شعاع توجيه المستقيم (D_3) هو $\vec{n_3}\left(\frac{6}{5},-\frac{4}{5},1\right)$.

نلاحظ أن : $\frac{2}{\frac{6}{5}} \neq \frac{1}{\frac{-4}{5}}$ و عليه فإن المستقيمين (D_1) و (D_3) غير متوازيان أي أنهما إما متقاطعان أو ليس من نفس المستوي .

دراسة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_3) :

$$\begin{cases} \frac{6}{5}\lambda = 1+2t \\ -\frac{4}{5}\lambda = -2+t ; t \in R \\ \lambda = 1-t \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} \frac{6}{5}\lambda - 2t = 1 .....(1) \\ -\frac{4}{5}\lambda - t = -2 .....(2) \\ \lambda + t = 1 ....(3) \end{cases}$$

من(2) و(3) نجد : $-\frac{4}{5}\lambda + \lambda = -1$ ومنه: $\frac{1}{5}\lambda = -1$

و عليه فإن : $\lambda = -5$ و منه : $t = 6$.

بالتعويض في المعادلة (1) نجد :

$$\frac{6}{5}(-5) - 2\times 6 = -6-12 = -18 \neq 1$$

بما أن الجملة ليست لها حل و بالتالي فإن المستقيمين (D_1) و (D_3) غير متقاطعان يعني أنهما ليس من نفس المستوي

4) إثبات أن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة يطلب تعينها :

التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :

بما أن للمستقيم (Δ) يمر من النقطة A (5 , -1 , 4) و شعاع توجيهه $\vec{u}(3,1,1)$ و لتكن M (x , y , z) نقطة من (Δ) معناه $\overrightarrow{AM} = \alpha.\vec{u}$

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-5; y+1; z-4)$

و عليه :

$$\begin{cases} x-5 = 3\alpha \\ y+1 = \alpha \quad ; \alpha \in R \\ z-4 = \alpha \end{cases}$$

أي :

$$\begin{cases} x = 3\alpha + 5 \\ y = \alpha - 1 \quad ; \alpha \in R \\ z = \alpha + 4 \end{cases}$$

إثبات أن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان :

لدينا شعاع توجيه المستقيم (D_1) هو $\vec{n_1}(2,1,-1)$

و شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو $\vec{u}(3,1,1)$.

نلاحظ أن : $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{1}$ و عليه فإن المستقيمين (D_1) و (Δ) غير متوازيانو بالتالي هما إما متقاطعان أو ليس من نفس المستوي .

دراسة تقاطع المستقيمين (D_1) و (Δ) :

$$\begin{cases} 5+3\alpha = 1+2t \\ -1+\alpha = -2+t ; t \in R \\ 4+\alpha = 1-t \end{cases}$$

و منه :

$$\begin{cases} 3\alpha - 2t = -4 .....(1) \\ \alpha - t = -1 ....(2) \\ \alpha + t = -3 ....(3) \end{cases}$$

من (2) و (3) نجد : $2\alpha = -4$ و منه : $\alpha = -2$

و عليه فإن : $-3 = -2 + t$ و منه : $t = -1$.

بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $-4 = 2 + 6 -$ أي أن الجملة تقبل حل وحيد هو $\alpha = -2$ و $t = -1$.

و بالتالي فإن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة هي :

من أجل $\alpha = -2$: $\begin{cases} x = 3(-2) + 5 = -1 \\ y = -2 - 1 = -3 \\ z = -2 + 4 = 2 \end{cases}$

إذن : $(D_1) \cap (\Delta) = \{(-1,-3,2)\}$.

التمرين 04:

نعتبر النقط $A(1,0,-1)$ ، $B(2,2,3)$ ، $C(3,1,-2)$

1) تحقق أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة .

2) أثبت أن المثلث ABC قائم.

3) أحسب مساحة المثلث ABC .

4) عين إحداثيات النقطة D مركز ثقل المثلث ABC .

حل التمرين 04 :

1) التحقق أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة :

$\overrightarrow{AB}(1,2,4)$ و $\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$

نلاحظ أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا لأن: $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$

ومنه النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة .

2) أثبات أن المثلث ABC قائم:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(1,2,4)$ و $\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$

و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1\times 2 + 2\times 1 + 4\times(-1) = 0$

ومنه المثلث ABC قائم في A .

3) حساب مساحة المثلث $ABC : S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$

ولدينا: $AB = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (4)^2} = \sqrt{21}$

و $AC = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

ومنه: (وم) $S = \frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{\sqrt{21}.\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$

4) تعيين إحداثيات النقطة D مركز ثقل المثلث ABC :

D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$

وعليه فإن: $D\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{0+2+1}{3}, \frac{-1+3-2}{3}\right)$

ومنه $D(2,1,0)$.

التمرين 05:

$A(2;1;-1)$ ، $B(-1;2;4)$ ، $C(0;-2;3)$ ، $D(1;1;-2)$

والمستوي (P) الذي معادلته : $x - 2y + z + 1 = 0$.

أجب بصح أو خطأ معللا إجابتك على كل سؤال من الأسئلة الآتية :

1) النقط $A; B; C$ تعين مستويا وحيدا .

2) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P) .

3) المعادلة الديكارتية للمستوي (ABD) هي :

$$x + 8y - z - 11 = 0$$

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AC) هو: $(k \in R)$

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$$

5) سطح الكرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها $\frac{\sqrt{6}}{3}$ مماسه للمستوي (P) .

حل التمرين 05 :

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;1;5)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2;-3;4)$

و $\frac{1}{-3} \neq \frac{-3}{-2}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا .

ومنه النقط A ;B ;C ليست على استقامة واحدة وعليه النقط A ;B ;C تشكل مستو وحيد وعليه فإن الإجابة **(صحيحة)**.

2) نعوض إحداثيات A و C في معادلة (P) نجد :

$2-2(1)+(-1)+1=0$ ومنه $A\in(P)$

$0=0$

$0-2(-2)+3+1=0$

$8\neq 0$ ومنه $C\notin(P)$

بما أن $A\in(P)$ و $C\notin(P)$ فإن المستقيم (AC) غير محتوى في (P) وعليه فإن الإجابة **(خاطئة)**.

3) نتحقق أن النقط (ABD) تشكل مستو وحيد :

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-3;1;5)$ و $\overrightarrow{AD}(-1;0;-1)$

و $\frac{5}{-1}\neq\frac{-3}{-1}$ ومنه النقط A;B;D تعين مستو وحيد.

نعوض إحداثيات A;B;D في المعادلة الديكارتية :

$x+8y-z-11=0$

نجد $2+8(1)-(-1)-11=0$ ، $0=0$ وعليه إحداثيات A تحقق المعادلة :

$-1+8(2)-4-11=0$ أي $0=0$.

وعليه إحداثيات B تحقق المعادلة

$1+8(1)-(-2)-11=0$ أي $0=0$.

وعليه إحداثيات D تحقق المعادلة

وعليه فإن الإجابة **(صحيحة)**

4) نعوض إحداثيات A في التمثيل الوسيطي نجد :

$$\begin{cases}2=2k & ; \quad k=1\\ 1=2+3k & ; \quad k=-\frac{1}{3}\\ -1=3-4k & ; \quad k=1\end{cases}$$

ومنه إحداثيات A لاتحقق التمثيل الوسيطي وعليه فإن الإجابة **(خاطئة)**.

5) $$d((P);D)=\frac{1-2(1)+(-2)+1}{1^2+(-2)^2+(1)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt6}=\frac{2\sqrt6}{6}=\frac{\sqrt6}{3}$$

أي: $d((P);D)$ يساوي نصف قطر الكرة وعليه الإجابة **(صحيحة)**.

التمرين 06:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(\lambda;2;3)$، $B(2;0;-1)$، $C(1;4;0)$، $D(0;0;1)$

1) أحسب بدلالة λ الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$.

2) عين قيمة العدد الحقيقي λ كي يكون المثلث ABC قائم في C .

3) في ما يأتي نأخذ $\lambda=-4$.

أ) بين أن النقط A,B,C,D لا تنتمي إلى نفس المستوي.

ب) عين إحداثيات النقطة G مرجح الجملة :

$\{(A;2);(B;1);(C;-2)\}$

ج) عين المجموعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق مايلي : $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{MD}=0$.

د) عين معادلة ديكارتية للمجموعة (E).

حل التمرين 06 :

1) $\overrightarrow{AB}(2-\lambda;-2;-4),\overrightarrow{AC}(1-\lambda;2;-3),\overrightarrow{BC}(-1;4;1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda^2-3\lambda+10$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda$

و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda+4$

2) يكون المثلث ABC في C إذا تحقق : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

ومنه $\lambda+4=0$ ومنه $\lambda=-4$.

3) أ) $A(4;2;3)$، $B(2;0;-1)$، $C(1;4;0)$، $D(0;0;1)$

$\overrightarrow{AB}(6;-2;-4)$, $\overrightarrow{AC}(5;2;-3)$, $\overrightarrow{AD}(4;-2;-2)$.

تكون النقاط D,C,B,A من نفس المستوي إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AD}$ من نفس المستوي أي إذا وجد عددين حقيقيين.

α,β يحققان : $\overrightarrow{AD}=\alpha\,\overrightarrow{AB}+\beta\,\overrightarrow{AC}$

ومنه: * $\begin{cases}6\alpha+5\beta=4 & (1)\\ -2\alpha+2\beta=-2 & (2)\\ -4\alpha-3\beta=-2 & (3)\end{cases}$

الجملة المكونة من المعادلتين (2) و(3) تقبل كحل $\alpha=\frac{5}{2}$ و $\beta=-\frac{2}{7}$ وهما لا يحققان (1) إذن الجملة * ليست لها حل وبالتالي لا يوجد α,β يحققان العلاقة $\overrightarrow{AD}=\alpha\,\overrightarrow{AB}+\beta\,\overrightarrow{AC}$ ومنه النقاط $A;B;C;D$ لا تنتمي إلى نفس المستوي.

ب/ نعلم أن : $x_G=\dfrac{2x_A+x_B-2x_C}{2+1-2}=-8$

$y_G=\dfrac{2y_A+y_B-2y_C}{2+1-2}=-4$,

$z_G=\dfrac{2z_A+z_B-2z_C}{2+1-2}=5$

ومنه إحداثيات النقطة $G(-8;-4;5)$

جـ/ بما أن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;2);(B;1);(C;-2)\}$

فإنها تحقق العلاقة : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$$\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{MD}=0$$

$$\left(2\left(\overrightarrow{MG}+GA\right)+\left(\overrightarrow{MG}+GB\right)-2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)\right)\cdot\overrightarrow{MD}=0$$

$$\left(2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{GC}\right)\cdot\overrightarrow{MD}=0$$

ومنه: $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

أي مجموعة النقط M من الفضاء هي جميع نقاط سطح الكرة التي قطرها $[GD]$.

د/ تعيين معادلة ديكارتية للمجموعة (E) :

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (E): $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

لدينا: $\overrightarrow{MG}(x+8;y+4;z-5)$ و $\overrightarrow{MD}(x;y;z-1)$

أي: $(x+8).(x)+(y+4).(y)+(z-5).(z-1)=0$

ومنه: $x^2+y^2+z^2+8x+4y-6z+5=0$.

ومنه: $(x+4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=24$

التمرين 07:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1) أكتب معادلة السطح الكروي (S) الذي مركزه $\omega(1;2;-1)$ ويشمل النقطة $A(2;0;3)$.

2) أكتب معادلة المستوي (P) الذي يمس الكرة (S) في A .

3) أثبت أن المستوي (π) الذي معادلته :

$$x+2y+2z+15=0$$

يمس السطح الكروي (S') ذو المعدلة $x^2+y^2+z^2-25=0$ ثم عين إحداثيات نقطة التماس.

حل التمرين 07 :

1) الكرة التي مركزها ω وتشمل النقطة A يكون نصف قطرها ωA

$$\omega A=\sqrt{(x_A-x_\omega)^2+(y_A-y_\omega)^2+(z_A-z_\omega)}$$

$$=\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{21}$$

نعلم أن معادلة الكرة (S) التي مركزها ω ونصف قطرها R هي : $(x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2=R^2$

إذن معادلة الكرة (S) هي :

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=21$$

ومنه : $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-15=0$.

2) المستوي (P) يمس الكرة (S) في النقطة A يعني

$$\overrightarrow{\omega A}\perp(P)$$

إذن $\overrightarrow{OA}(1;-2;4)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) وتكون معادلة المستوي (P) هي من الشكل :

$x-2y+4z+k=0$ وبما أن المستوي (P) يشمل $A(2;0;3)$ فإن $2-2\times0+4\times3+k=0$ ومنه $k+14=0$ ومنه: $k=-14$ وتكون معادلة المستوي (P) هي: $x-2y+4z-14=0$

3) لدينا: $x^2+y^2+z^2-25=0$

ومنه $x^2+y^2+z^2=25=5^2$ وهي تمثل معادلة الكرة (S') التي مركزها $O(0;0;0)$ ونصف قطرها 5

المسافة بين النقطة O والمستوي (π) هي :

$$d(O;(P))=\frac{|0\times1+2\times0+2\times0+15|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{15}{3}=5$$

بما أن المسافة بين مركز الكرة (S') والمستوي (π) تساوي نصف قطرها 5 فإن (π) يمس الكرة (S') في النقطة H نقطة تقاطع (S') والمستوي (π) وهي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (π) أي نقطة تقاطع المستقيم (OH) و (π) بما أن المستقيم (OH) عمودي على (π) فيكون $\vec{n}(1;2;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (π) هو شعاع التوجيه له ويكون التمثيل الوسيطي للمستقيم (OH) الذي يمر بالنقطة O وشعاع التوجيه $\vec{n}(1;2;2)$ هو :

$$\begin{cases}x=\lambda\\y=2\lambda\\z=2\lambda\end{cases},\ \lambda\in R\ \ ,\ (OH)\cap(\pi)=\{H\}$$

يعني:

$$\begin{cases}x=\lambda\\y=2\lambda\\z=2\lambda\\x+2y+2z+15=0\end{cases}$$

ومنه

$$(*)\begin{cases}x=\lambda\\y=2\lambda\\z=2\lambda\\\lambda+2\lambda+2\lambda+15=0\end{cases}$$

من الجملة $(*)$ نستنتج $\lambda=-\frac{5}{3}$ وبتعويض λ في المعادلات للتمثيل الوسيطي لـ (OH) نجد :

ومنه: $x=-\frac{5}{3}$، $y=-\frac{10}{3}$، $z=-\frac{10}{3}$: $H\left(-\frac{5}{3};-\frac{10}{3};-\frac{10}{3}\right)$

التمرين 08:

في الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . نعتبر النقاط $A(-1;2;-1)$ ، $B(1;0;0)$ ، $\omega(2;1;0)$

1) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(AB\omega)$.

3) نعتبر في الفضاء (E) الكرة (S) المعرفة بالمعادلة

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$$

أ- عين نصف قطر الكرة (S) وحدد مركزها .

ب- عين تقاطع الكرة (S) والمستوي $(AB\omega)$.

ج- بين أن المستقيم (AB) يقطع الكرة (S) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما .

حل التمرين 08 :

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(2;-2;1)$. f نقطة من المستقيم (AB) معناه يوجد عدد حقيقي λ بحيث : $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$

ومنه: $\begin{cases}x=2\lambda-1\\y=-2+2\lambda\\z=\lambda-1\end{cases}(\lambda\in R)$ وهو التمثيل الوسيطي لـ (AB)

2) النقاط $A;B;\omega$ ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{B\omega}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي فهي تشكل مستوي $(AB\omega)$

الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي $(AB\omega)$ هو الشعاع الذي يعامد الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{B\omega}$ أي $\vec{n}(a;b;c)\perp\overrightarrow{AB}(2;-2;1)$ و $\overrightarrow{B\omega}(1;1;0)\perp\vec{n}(a;b;c)$ ومنه $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{B\omega}=0$

$\begin{cases}2a-2b+c=0\\a+b=0\end{cases}$ بأخذ $a=1$ فإن $c=-4$ ، $b=-1$

ومنه $\vec{n}(1;-1;-4)$ وتكون معادلة المستوي $(AB\omega)$ من الشكل : $x-y-4z+k=0$ وبما أن المستوي يشمل $B(1;0;0)$ فإن : $1-0-4\times0+k=0$ ومنه $k=-1$.

إذن معادلة المستوي $(AB\omega)$ هي: $x-y-4z-1=0$.

3) أ- لدينا معادلة $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$

ومنه $(x-2)^2-4+(y-1)^2-1+z^2-1=0$

ومنه $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=6$ وهي تمثل معادلة كرة مركزها النقطة $\omega(2;1;0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

ب) بما أن ω مركز الكرة ينتمي إلى المستوي $(AB\omega)$ فإن الكرة (S) والمستوي $(AB\omega)$ يتقاطعان حسب الدائرة الكبيرة في الكرة أي الدائرة التي مركزها ω ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

ج) $(AB)\cap(S)$ يعني :

$$(*)\begin{cases}x=2\lambda-1 & (1)\\y=-2\lambda+2 & (2)\\z=\lambda-1 & (3)\\x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0 & (4)\end{cases}$$

بتعويض $x=2\lambda-1$ و $y=-2\lambda+2$ و $z=\lambda-1$ في المعادلة (4) وبعد تبسيطها نجد :

$9\lambda^2-18\lambda+5=0$ ومنه: $\lambda_1=\frac{5}{3}$ و $\lambda_2=\frac{1}{3}$ إذن المستقيم (AB) يقطع الكرة (S) في النقطتين:

$$E\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right) \quad و \quad F\left(-\frac{1}{2};\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$$

(إحداثيات النقطتين E ؛ F يتم حسابها بتعويض λ بالقيمتين λ_1 و λ_2 في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)).

التمرين 09:

الفضاء المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

ويعطى المستقيم D حيث : $\begin{cases}x=2-t\\y=2-3t\quad t\in R\\z=1+t\end{cases}$

ولتكن النقطة $A(3;-2;1)$.

1) أوجد معادلة المستوي P العمودي على D والذي يشمل النقطة A .

2) أحسب إحداثيات النقطة H المسقط العمودي لـ A على D .

3) أحسب المسافة بين A و D .

حل التمرين 09 :

1) لدينا $\vec{n}(-1;3;1)$ شعاع توجيه لـ D إذن يكون $M(x,y,z)$ نقاط من P إذا وفقط : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

ومنه:معادلة P هي :

$$-(x-3)-3(y+2)+(z-1)=0$$

أي $x+3y-z+4=0$

2) النقطة H هي تقاطع المستقيم D مع المستوي P لنبحث عن قيم t التي تجعل النقطة M من المستقيم D تنتمي للمستوي P أي تحق الشرط (المعادلة) $2-t+3(2-3t)-(1+t)+4=0$ وحلها الوحيد هو $t=1$ ومنه إحداثيات النقطة H هي $H(1;-1;2)$

3) المسافة بين A و D هي الطول AH وحيث أن :

$$\overrightarrow{AH}(-2;1;1)$$

إذن $AH^2=(-2)^2+1^2+1^2$ أي $AH=\sqrt{6}$

التمرين 10 :

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقاط: $A(-1;0;1)$، $B(1;1;0)$

$C(0;-1;-4)$، $D(-1;1;2)$

1- أ/ بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان .

ب/ استنتج طبيعة المثلث ABC .

2- أ/ عين الشعاع $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

ب/ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

ج/ تحقق بأن النقطة D لاتنتمي إلى المستوي (ABC) واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

د/ أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) .

3- أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

4- أ/ تحقق أن معادلة المستوي (BCD) هي:

$$2x-5y+2z+3=0$$

ب/ أحسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD).

ج/ استنتج مساحة المثلث (BCD).

حل التمرين 10 :

1) أ/ ولدينا: $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ و $\overrightarrow{BC}(-1;-2;-4)$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=(2)\times(-1)+(1)\times(-2)+(-1)\times(-4)$$
$$=0$$

ومنه الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

ب/ طبيعة المثلث ABC : $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$

و $\overrightarrow{BC}(-1;-2;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-1;-5)$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

و $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{21}$

و $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-5)^2}=3\sqrt{3}$

و بما أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان ومنه فإن المثلث ABC قائم في النقطة B .

2) أ/ تعيين الشعاع $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

نفرض $\vec{u}(a;b;c)$ حيث $a;b;c$ أعداد حقيقية ثابتة ولدينا:

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ معناه: $2a+b-c=0$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ معناه: $-a-2b-4c=0$

لدينا: $\begin{cases}2a+b-c=0\\-a-2b-4c=0\end{cases}$ ونفرض $c=1$

ومنه: $\begin{cases}2a+b-1=0\\-a-2b-4=0.......(\times 2)\end{cases}$ نجد

$\begin{cases}2a+b-1=0.....(1)\\-2a-4b-8=0....(2)\end{cases}$ بجمع المعادلتين(1) و(2)

طرف لطرف نجد: $-3b-9=0$ ومنه $b=-3$

ثم نجد $a=2$ ومنه: $\vec{u}(2;-3;1)$.

ب/ استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

معادلة المستوي (ABC) تكون على الشكل :

$$a.x+b.y+c.z+d=0$$

ومنه: $2.x-3.y+.z+d=0$

ثم بتعويض إحداثيات النقطة $A(-1;0;1)$ في المعادلة $2.x-3.y+z+d=0$ نجد $2.(-1)-3(0)+(1)+d=0$

وعليه فإن: $d=1$ ومنه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2.x-3.y+.z+1=0$

ج/ التحقق بأن النقطة D لاتنتمي إلى المستوي (ABC) واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$:

نعوض إحداثيات النقطة $D(-1;1;2)$ في المعادلة $2.x-3.y+.z+1=0$ نحصل على:

$2.(-1)-3.(1)+(2)+1=0$ ومنه نجد: $-2=0$

(وهذا مستحيل) ومنه النقطة D لاتنتمي إلى المستوي

وعليه نستنتج أن الرباعي $ABCD$ رباعي وجوه.

د/ حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) :

$$d((ABC),D)=\frac{|2.x_D-3.y_D+.z_D+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(1)^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$

3) حساب حجم رباعي الوجوه : $ABCD$

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{BA\times BC}{2}\right)\times d((ABC);D)$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{21}}{2}\right)\frac{\sqrt{14}}{7}=1$$

4) أ/ التحقق أن معادلة المستوي (BCD) هي:

$$2x-5y+2z+3=0$$

نعوض إحداثيات $D;B;C$ في المعادلة الديكارتية :

$$2x-5y+2z+3=0$$

نجد $2(-1)-5(1)+2(2)+3=0$ أي $0=0$

وعليه إحداثيات D تحقق المعادلة $2(1)-5(1)+2(0)+3=0$

أي $0=0$ وعليه إحداثيات B تحقق المعادلة :

$2(0)-5(-1)+2(-4)+3=0$ أي $0=0$.

وعليه إحداثيات C تحقق المعادلة.

ب/ حساب بعد النقطة A عن المستوي (BCD) :

ج/ استنتج مساحة المثلث (BCD).

$$d((BCD),A)=\frac{|2.x_A-5.y_A+2.z_A+3|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+(2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{33}}=\frac{\sqrt{33}}{11}$$

التمرين 11:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط : $A(2;0;0)$ ، و $B(0;1;0)$ ، و $C(0;0;2)$.

1) بين أن النقط A ; B ; C ليست في استقامية .

2) جد معادلة للمستوي (ABC) .

3) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) .

4) (P) المستوي الذي معادلته: $2x+2y+z-2=0$.

أ/ بين أن : (P) و (ABC) متقاطعان .

ب/ بين أن : (P) يشمل B و C ، ماذا تستنتج ؟

5) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

حل التمرين 11 :

1) إثبات أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة :

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;2)$

$\frac{0}{1}\neq\frac{-2}{-2}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2) معادلة المستوي (ABC): ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظما لـ (ABC) فإنه يحقق: $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0$

ومنه $\begin{cases}-2a+b=0\\-2a+2c=0\end{cases}$ نفرض $a=1$ ومنه : $b=2$

ومنه $c=1$ وعليه $\vec{n}(1;2;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC).

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من (ABC)

فإن: $\overrightarrow{AM}(x-2;y;z)$; $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

ومنه $(x-2)(1)+(y).(2)+z(1)=0$

وعليه فإن: $x+2y+z-2=0$.

3) إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC):

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (BC) فإن: $\overrightarrow{BM}=\lambda\,\overrightarrow{BC}$

حيث $(\lambda\in;R)$ مع $\overrightarrow{BM}(x;y-1;z)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-1;2)$

ومنه: $\begin{cases} x=0 \\ y-1=-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda+1 \\ z=2\lambda \end{cases}$

4) أ/ إثبات أن (P) و (ABC) متقاطعان:

لدينا: $\vec{n}(1;2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

و $\vec{n'}(2;2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P).

بما أن: $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{2}$ ومنه $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطان خطيا معناه (P) و (ABC) متقاطعان.

ب/ إثبات أن (P) يشمل B و C:

نعوض إحداثيات B في معادلة (P) نجد:

$2(0)+2(1)+0-2=0$ أي $0=0$ ومنه $c \in (P)$

نستنتج أن: $(P) \subset (BC)$ وبما أن $(ABC) \subset (BC)$

فإن المستويان (P) و (ABC) متقاطعان في المستقيم (BC)

5) تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

لتكن النقطة G مرجح الجملة:

$\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$ فيه تحقق: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

لدينا: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

$$\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right\|$$

$$=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}\right\|$$

أي $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|$ ومنه $3MG = \left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right\|$

ومنه المجموعة (E) هي عبارة عن سطح كرة مركزها النقطة G ونصف قطرها r، حيث: $r = \dfrac{\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right\|}{3}$

ولدينا: $G\left(\dfrac{2+0+0}{2};\dfrac{0+1+0}{2};\dfrac{0+0+2}{2}\right)$

ومنه $G\left(1;\dfrac{1}{2};1\right)$

$\overrightarrow{BA}(2;-1;0)$ ، $\overrightarrow{CA}(2;0;-2)$

ومنه: $\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)(4;-1;-2)$

أي: $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right\| = \sqrt{4^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{21}$

ومنه: $r = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

التمرين 12:

(بكلوريا علمي 2009)

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;3)$

(P) مستو معادلته من الشكل : $x-z+1=0$

1) أ/ بين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

ب/ ما طبيعة المثلث ABC .

2) أ/ تحقق أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى (ABC) .

ب/ ما طبيعة $ABCD$.

3) أ/ أحسب المسافة بين D و المستوي (ABC) .

ب/ أحسب حجم $ABCD$.

حل التمرين 12 :

1) أ/ $\overrightarrow{AB}(-1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ غير مرتبطان خطيا .لأنه : نفرض أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا معناه يوجد عدد حقيقي غير معدوم λ حيث :

$$\lambda\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\begin{cases} -1=\lambda\times 1 : \lambda=-1 \\ 2=\lambda\times 1 \ : \lambda=2 \\ -1=\lambda\times 1 \end{cases}$$

وهذا غير ممكن $2\neq -1$

ومنه النقط A و B و C ليست على استقامة واحدة فإنه يوجد مستو وحيد في الفضاء يشمل النقط A و B و C وبما أن

$A\in(P)$ لأن : $1-2+1=0$

$B\in(P)$ لأن : $0-1+1=0$

$C\in(P)$ لأن : $2-3+1=0$ فإن: المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

ب/ $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=-1\times1+2\times1+(-1)\times1=0$

ومنه المثلث ABC قائم في A .

2) أ/ $D(2;3;4)$ نعوض إحداثيات D في معادلة (ABC)

نجد: $2-4+1=0$

$-1=0$ مستحيل ومنه النقطة D لا تنتمي إلى (ABC) .

ب/ بما أن D لا تنتمي إلى (ABC) فإن الرباعي $ABCD$ رباعي وجوه .

3) أ/ $d(D;(P))=\dfrac{|2-4+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ب/ $h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $S=\dfrac{AB\times AC}{2}$

$AB=\sqrt{(0-1)^2+(2-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{6}$

$AC=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{3}$

ومنه : $V=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$ (وحدة مكعبة)

التمرين 13 :

(بكالوريا علمي 2009)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(2;3;-1)$ ، $B(1;-2;4)$ ، $C(3;0;-2)$ ، $D(1;-1;-2)$.وليكن (P) المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$

المطلوب : أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :

1) النقط A ، B ، C في إستقامية .

2) (ABD) مستو معادلته الديكارتية هي :

$$25x-6y-z-33=0$$

3) المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π) .

4) المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H(1;1;-1)$.

حل التمرين 13 :

1) إذا كانت النقط A ، B ، C على إستقامية واحدة فإن : $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا معناه يوجد عدد حقيقي λ حيث : $\overrightarrow{AC}=\lambda\ \overrightarrow{AB}$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;-5;5)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-3;-1)$.

ومنه : $\begin{cases} -1=\lambda \\ -5=-3\lambda \\ 5=-\lambda \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \lambda=-1 \\ \lambda=\dfrac{5}{3} \\ \lambda=-5 \end{cases}$

ومنه : $\overrightarrow{AC}$ لا يوازي $\overrightarrow{AB}$ ومنه : (الجواب خاطئ) .

2) إحداثيات النقط A ، B ، D تحقق المعادلة :

$$25x-6y-z-33=0$$

من أجل النقطة $A: 25(2)-6(3)-(-1)-33=0$

أي : $0=0$.

من أجل النقطة $B: 25(1)-6(-2)-(4)-33=0$

أي : $0=0$.

من أجل النقطة $D:25(1)-6(-1)-(-2)-33=0$

أي : $0=0$.

ولدينا : $\overrightarrow{AD}$ لا يوازي $\overrightarrow{AB}$.

أي النقط A ، B ، D ليست على استقامة واحدة .
ونعلم أن كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة في الفضاء تشكل مستو وحيد .

ومنه (ABD) مستو معادلته الديكارتية هي :

$25x-6y-z-33=0$ ومنه : (الجواب صحيح)

3) لدينا : $\overrightarrow{CD}(-2;-1;0)$ و $\vec{n}(2;-1;2)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) إذا كان المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π) فإن : $\overrightarrow{CD}$ يوازي $\vec{n}$.

معناه يوجد عدد حقيقي λ حيث : $\vec{n}=\lambda\ \overrightarrow{CD}$.

أي : $\begin{cases}-2=2\lambda \longrightarrow \lambda=-1\\ -1=-\lambda \longrightarrow \lambda=1\\ 0=2\lambda \longrightarrow \lambda=0\end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{CD}$ لا يوازي $\vec{n}$.

أي : $\overrightarrow{CD}$ ليس شعاعا ناظميا للمستوي (P) .

ومنه : (الجواب خاطئ) .

4) لدينا :

$$BH=\sqrt{(1-1)^2+(1-(-2))^2+(-1-(4))^2}$$
$$=\sqrt{34}$$

و

$$d(B;(P))=\frac{|-2(1)-(-2)+2(4)+1|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2}}$$
$$=\frac{9}{\sqrt{9}}=\sqrt{9}$$

ومنه $BH\neq d(B;(P))$ ومنه : (الجواب خاطئ) .

التمرين 14 :

(بكلوريا علمي 2010)

نعتبر الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، النقط $A(1,1,0)$ و $B(2,1,1)$ و $C(-1,2,-1)$

1) أ) بين أن النقط A و B و C ليست في استقامية .

ب) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $x+y-z-2=0$

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب : $(P): x+2y-3z+1=0$ و $(Q): x+y-z-2=0$ و المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0,4,3)$ و $\vec{u}(-1,5,3)$ شعاع توجيه له .

أ) أكتب تمثيلا وسطيا للمستقيم (D) .

ب) تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) .

3) عين تقاطع المستويات الثلاث (ABC) و (P) و (Q) .

حل التمرين 14 :

1) أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2,1,-1)$ و بما أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ فمعنى ذلك أن النقط C,B,A ليست إستقامية .

ب) يمكنك التأكد بكل سهولة من أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $x+y-z-2=0$ و ذلك بتعويض إحداثيات كل نقطة النقط C,B,A تحقق المعادلة.

2) أ) يعطى التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $F(0,4,3)$ و شعاع له $\vec{u}(-1,5,3)$ كما يلي :

$\begin{cases}x=-\lambda\\ y=5\lambda+4\\ z=3\lambda+3\end{cases}$ مع λ عدد حقيقي ثابت .

ب) تقاطع المستويين (P) و (Q) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق : $\begin{cases}x+2y-3z+1=0\\ 2x+y-z-1=0\end{cases}$

بوضع $z=t$ نحصل على $\begin{cases}x+2y=3t-1\\ 2x+y=t+1\\ z=t\end{cases}$

أي : $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}t + 1 \\ y = \dfrac{5}{3}t - 1 \\ z = t \end{cases}$ و بوضع $t = 3\lambda + 3$

نجد : $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 5\lambda + 4 \\ z = 3\lambda + 3 \end{cases}$ وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

طريقة أخرى : بما أن (D) مستقيم التقاطع بين المستويين (P) و (Q) فيعني أن إحداثيات نقط (D) تحقق معادلتي المستويين .

إحداثيات نقط المستقيم (D) هي $(-\lambda, 5\lambda+4, 3\lambda+3)$

تحقق معادلة (P) لاحظ أن :

$-\lambda + 2(5\lambda+4) - 3(3\lambda+3) + 1 = 0$ و نفس الأمر مع معادلة المستوي (Q).

3) تعيين تقاطع (ABC) و (P) و (Q):

نعلم أن $(P)\cap(Q)=(D)$ نعوض $x; y; z$ من التمثيل الوسيطي لـ (D) في معادلة (ABC) نجد:

$$-\lambda + (5\lambda+4) - (3\lambda+3) - 2 = 0$$

$$\lambda = 1$$

ومنه: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 9 \\ z = 6 \end{cases}$ وعليه $(P)\cap(Q)\cap(ABC) = \{(-1;9;6)\}$.

التمرين 15 :

(بكلوريا علمي 2010)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x - 2y + z + 3 = 0$.

1) نذكر أن محور الفواصل $(O,\vec{i})$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

عين إحداثيات A نقطة تقاطع حامل المحور $(O,\vec{i})$ مع المستوي (P).

2) B و C النقطتان من الفضاء حيث : $B(0,0,-3)$ و $C(-1,-4,2)$.

أ) تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

ب) أحسب الطول AB .

ج) أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P) .

3) أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C و العمودي على المستوي (P) .

ب) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

ج) أحسب مساحة المثلث ABC .

حل التمرين 15 :

1) إحداثيات A بتعويض y بـ 0 و z بـ 0 في معادلة (P) نحصل على $x = -3$ و بالتالي إحداثيات A هي $(-3,0,0)$

2) أ) إحداثيات B تحقق معادلة (P).

ب) $AB = 3\sqrt{2}$.

ج) لتكن d المسافة المطلوبة ، عندئذ

$$d = \frac{|x_C - 2y_C + z_C + 3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

3) أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ): بما أن (Δ) عمودي على (P) فهذا يعني أن شعاع توجيه (Δ) هو الناظمي لـ (P) و مركبات الشعاع الناظمي للمستوي هي $(1,-2,1)$ وبالتالي التمثيل الوسيطي للمستقيم الذي يشمل $C(-1,-4,2)$ و شعاع توجيه له $\vec{n}(1,-2,1)$ هي $\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = -2\lambda - 4 \\ z = \lambda + 2 \end{cases}$

مع λ عدد حقيقي كيفي .

ب) حتى تكون A نقطة من (Δ) يجب البحث عن عدد حقيقي وحيد λ يحقق $\begin{cases}-3=\lambda-1\\0=-2\lambda-4\\0=\lambda+2\end{cases}$ واضح أن

$\lambda=-2$ يحقق الجملة و منه A نقطة من (Δ).

ج) مساحة المثلث ABC هي $\frac{1}{2}d\times AB$ حيث :

$d=2\sqrt{6}$ و $AB=3\sqrt{2}$ ومنه مساحة ABC هي $6\sqrt{3}$.

التمرين 16:

(بكلوريا علمي 2011)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، المستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له، و ليكن (Q) المستوي ذا المعادلة $x+2y-7=0$.

1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2) أ) تحقق أن النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q).

ب) بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3) لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ) أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P) ثم المسافة بين النقطة C و المستوي (Q).

ب) أثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

ج) استنتج المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ).

حل التمرين 16 :

1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

المستوي (P) يشمل النقطة $A(1,-2,1)$ و $\vec{n}(-2,1,5)$ شعاع ناظمي له نفرض $M(x,y,z)\in(P)$

و عليه : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\vec{0}$. ولدينا : $\overrightarrow{AM}(x-1,y+2,z-1)$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ يعني أن : $-2(x-1)+1(y+2)+5(z-1)=0$

أي : $-2x+2+y+2+5z-5=0$

أي : $-2x+y+5z-1=0$ و عليه معادلة المستوي (P) هي : $-2x+y+5z-1=0$

2) أ) التحقق أن النقطة B مشتركة بين المستويين (P) و (Q):

لأن $B\in(P)$:

$$-2(-1)+4+5(-1)-1=2+4-5-1=0$$

لأن $B\in(Q)$: $(-1)+2(4)-7=-8+8=0$

و عليه النقطة B نقطة مشتركة بين المستويين (P) و (Q)

ب) إثبات أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) :

لدينا $\vec{n}(-2,1,5)$ شعاع توجيه (P) و $\vec{n'}(1,2,0)$ شعاع توجيه المستوي (Q) و بما أن $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا فإن (P) و (Q) غير متوازيين فهما إما متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

لدينا : $\begin{cases}-2x+y+5z-1=0\\x+2y-7=0\end{cases}$ بوضع $Z=t$

نجد : $\begin{cases}-2x+y=1-5t\\x+2y=7\end{cases}$

و عليه : (Δ) : $\begin{cases}x=2t+1\\y=-t+3\\z=t\end{cases}$ مع $t\in R$

3) لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ) حساب المسافة بين C و المستوي (P) ثم المسافة بين C

و المستوي (Q):

$$d(C,(P))=\frac{|-2\times5+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(5)^2}}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{18\sqrt{30}}{30}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$$

$$d(C,(Q))=\frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+0^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب إثبات أن المستويين (P) و (Q) متعامدان :

لدينا : $\vec{n}.\vec{n'}=(-2\times1)+(2\times1)+(0\times5)=0$

فإن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

ج) استنتاج المسافة بين C و (Δ) :

بما أن المستويين (P) و (Q) متعامدان و متقاطعان وفق المستقيم (Δ) و بتطبيق نظرية فيثاغورث :

$$D(C,(\Delta))=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{9\times30}{25}+\frac{180}{25}}$$

$$=\sqrt{\frac{450}{25}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

التمرين 17 :

(بكلوريا علمي 2011)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$

1) أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له.

ب) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ج) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د) استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

2) نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث t عدد حقيقي، ولتكن الدالة h المعرفة على R بـ :

$h(t)=AM$.

أ) أكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t: $h'(t)=\frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$.

ج) استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن.

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة h، و المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

حل التمرين 17 :

1) أ) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) : المستقيم (Δ) يشمل النقطة B و $\vec{u}(1,-4,-1)$ شعاع توجيه له.

$M(x,y,z)$ نقطة من (Δ) و $\overrightarrow{BM}=\lambda\vec{i}$

أي : $(x-2,y-1,z-7)=\lambda(1,-4,-1)$ و منه: $\lambda\in R$;

$$\begin{cases}x=\lambda+2\\y=-4\lambda+1\\z=-\lambda+7\end{cases}$$

هو التمثيل الوسيطي لـ (Δ).

ب) التحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Δ) :

لدينا : $\begin{cases}\lambda+2=3\\-4\lambda+1=-3\\-\lambda+7=6\end{cases}$ و عليه : $\begin{cases}\lambda=1\\\lambda=1\\\lambda=1\end{cases}$

و بالتالي من أجل $\lambda=1$، النقطة C تنتمي إلى (Δ).

ج) إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2,0,2)$ و $\overrightarrow{BC}(1,-4,-1)$ و عليه :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=2(1)+0(-4)+2(-1)=2-2=0$

و بالتالي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د) استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) :

بما أن B من (Δ) و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان فإن :

$$d(A,(\Delta)) = AB = \sqrt{(2)^2 + 0^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

2) أ) كتابة $h(t)$ بدلالة t :

$$h(t) = AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2}$$

$$h(t) = \sqrt{(2+t)^2 + (1-4t-1)^2 + (7-t-5)^2}$$

$$h(t) = \sqrt{4+4t+t^2+16t^2+4+t^2-4t}$$

$$h(t) = \sqrt{8+18t^2}$$

ب) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي t :

$$h'(t) = \frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$$

الدالة $h(t)$ قابلة للإشتقاق على R ودالتها المشتقة هي :

$$h'(t) = \frac{(8+18t^2)'}{2\sqrt{18t^2+8}} = \frac{36t}{2\sqrt{18t^2+8}} = \frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$$

ج) قيمة العدد الحقيقي t التي يكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن هي عندما يكون $h'(t) = 0$

أي : $18t = 0$ و عليه $t = 0$.

القيمة الحدية الصغرى للدالة h هي :

$$h(0) = \sqrt{8+18(0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

و عليه : $h(0) = d(A,(\Delta))$.

التمرين 18 :

(بكلوريا علمي 2013)

الفضاء منسوب إلى معلم نتعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط:

$D(2;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$، $B(1;0;-1)$ ، $A(-1;1;3)$

والمستوي (P) ذا المعادلة $2y+z+1=0$

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$

حيث β وسيط حقيقي.

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ، ثم تحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P) .

2) بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ/ أحسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P).

ب/ بين أن D نقطة من (P) ، وأن المثلث BCD قائم.

4) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه ، ثم أحسب حجمه.

حل التمرين 18 :

1) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) :

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (BC) فإنها تحقق:

$\overrightarrow{BM} = \lambda.\overrightarrow{BC}$ حيث: $\overrightarrow{BM}(x-1;y;z+1)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$

ومنه: $\begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=-\lambda \\ z=2\lambda-1 \end{cases}$ حيث λ وسيط حقيقي.

التحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P) :

نعوض كل من $\begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=-\lambda \\ z=2\lambda-1 \end{cases}$ في معادلة $2y+z+1=0$:

(P) نحصل على: $2(-\lambda)+(2\lambda-1)+1=0$ أي $0=0$

ومنه فإن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

2) إثبات أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي:

لدينا: $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (BC)

و $\overrightarrow{U}(0;1;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$

وعليه فإن الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{U}$ غير مرتبطان خطيا وعليه يكون المستقيمان (Δ) و (BC) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

ولدينا: $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$ و $\begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=-\lambda \\ z=2\lambda-1 \end{cases}$

نضع: $\begin{cases} -1=\lambda+1........(1) \\ 2+\beta=-\lambda........(2) \\ 1-2\beta=2\lambda-1......(3) \end{cases}$ من (1) فإن: $\lambda=-2$

نعوض قيمة $\lambda=-2$ في المعادلتين (2) و(3) نجد: $\beta=0$ و $\beta=3$ و $3\neq 0$ ومنه (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ/ حساب المسافة بين النقطة A و المستوي

$$(P): d((P);A)=\frac{|2(1)+(3)+1|}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب/ إثبات أن D نقطة من (P)، وأن المثلث BCD قائم.

نعوض إحداثيات D في معادلة (P) نجد: $2(0)+1+1=0$ ومنه $0=0$ وعليه فإن D نقطة من (P).

ولدينا: $BC=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{6}$

و $BD=\sqrt{(1)^2+(0)^2+(0)^2}=1$

$CD=\sqrt{(0)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

نلاحظ أن: $BC^2=BD^2+CD^2$

ومنه حسب فيثاغورث فإن: المثلث BCD قائم في D.

4) إثبات أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثم حساب حجمه.:

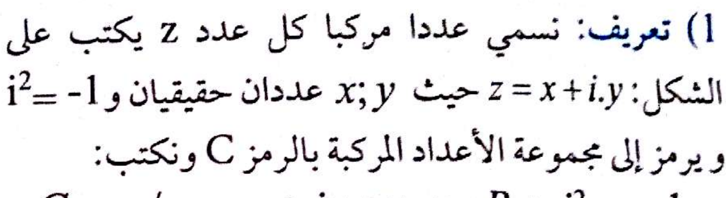
بما أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P) و D نقطة من (P) و BCD مثلث و $A\notin(P)$ فإن $ABCD$ رباعي وجوه.

حجمه V : (و.ح)

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{CD\times BD}{2}\right)\times d((P);A)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{5}\times 1}{2}.\frac{6\sqrt{5}}{5}=1$$

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية



1) **تعريف:** نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل: $z = x + i.y$ حيث $x; y$ عددان حقيقيان و $i^2 = -1$

و يرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بالرمز C ونكتب:

$$C = z / z = x + iy \; ; x, y \in R \; ; \; i^2 = -1$$

- يسمى x الجزء الحقيقي للعدد المركب z ويرمز له بالرمز . Re(z)

- يسمى y الجزء التخيلي للعدد المركب z ويرمز له بالرمز . Im(z)

ونكتب عندئذ وبصفة عامة:

الشكل الجبري لعدد مركب: $z = x + i.y$

حيث : $(x; y) \in R^2$

* إذا كان: Re(z) = 0 نقول إن z تخيلي صرف.

* إذا كان: Im(z) = 0 نقول إن z حقيقي صرف.

2) **مرافق عدد مركب :**

مرافق العدد المركب: $z = x + i.y$

حيث $x; y$ عددان حقيقيان هو : $\overline{Z} = x - iy$

خواص مرافق عدد مركب:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \times \bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ مع $z \neq 0$
- $z + \bar{z} = 2\,Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2iIm(z)$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ مع $z' \neq 0$

3) **التمثيل النقطي لعدد مركب :** في مممممم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ النقطة $M(x; y)$ صورة العدد المركب $z = x + i.y$

العدد المركب $z = x + i.y$ هو لاحقة النقطة $M(x; y)$

- يمكن كذلك أن نرفق بكل عدد مركب z الشعاع $\vec{U}$ حيث $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$، ويسمى $\vec{U}$ كذلك صورة z و z لاحقة $\vec{U}$.

ملاحظة: إذا كان الشعاعان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ صورتا العددين المركبين z و z′ على الترتيب يكون الشعاع $\vec{U} + \vec{V}$ هو صورة العدد المركب z+z′ ، ويكون الشعاع $\vec{U} - \vec{V}$ هو صورة العدد المركب z-z′ .

4) **طويلة وعمدة عدد مركب :** M نقطة معرفة بإحداثييها الديكارتية (x, y) أو بإحداثييها القطبية (r , θ) لدينا:

$$OM = r$$

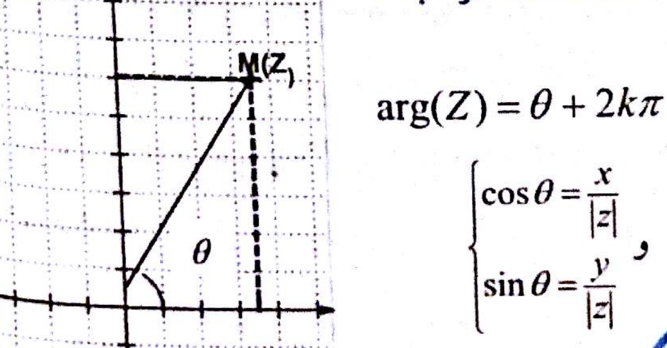
والموجهة $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \theta$ و $y = r\sin\theta$ $x = r\cos\theta$

ومنه ينتج: $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\sin\theta = \frac{y}{r}$

- **طويلة العدد المركب Z :**

$$\left\| \overrightarrow{OM} \right\| = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- **عمدة العدد المركب Z :**



$$\arg(Z) = \theta + 2k\pi$$

و $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$

خواص الطويلة والعمدة

العمدة	الطويلة	العدد المركب
θ	r	z
θ'	r'	z'
$n\theta$	r^n	z^n
$\theta+\theta'$	$r.r'$	$z.z'$
$\theta-\theta'$	$\frac{r}{r'}$	$\frac{z}{z'}$

ملاحظات: A، B نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب:

1) $AB=|z_B - z_A|$

2) $\arg(z_B-z_A) =(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB})$

3) $\arg(z_B)-\arg(z_A) =(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

5) الشكل المثلثي لعدد مركب :

تعريف: Z عدد مركب غير معدوم.

العدد Z يكتب على الشكل $Z=r.(\cos\theta+i.\sin\theta)$ حيث $r=|z|$ و $\theta=\arg(z)$ يسمى هذا الشكل بالشكل المثلثي للعدد المركب Z .

6) الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم:

1) تعريف: العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له يكتب $e^{i\theta}$ حيث: $e^{i\theta}= \cos\theta+i\sin\theta$ تسمى هذه الكتابة بترميز أولر. وإذا كان $z=r\cos\theta +r\sin\theta$ مع $r>0$ فإن: $z= re^{i\theta}$ تسمى هذه الكتابة الشكل الأسي للعدد المركب Z

2. خواص:

θ و θ' عددان حقيقيان:

$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$،

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$، $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

3. دستور موافر: Z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا: $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$

7) المعادلات من الدرجة الثانية:

1. مبرهنة:

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2+bz+c=0$

حيث c,b,a أعداد حقيقية مع $a\neq0$، $\Delta=b^2-4ac$ مميزها.

- إذا كان $\Delta = 0$: فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z=-\frac{b}{2a}$
- إذا كان $\Delta > 0$: فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- إذا كان $\Delta<0$: فإن المعادلة تقبل حلين مترافقين وذلك بوضع $i^2=-1$ في عبارة Δ

2. الجذران التربيعيان لعدد مركب:

تعريف:

z_0 عدد مركب معطى. الجذرين التربيعيين للعدد z_0 هما حلا المعادلة $z^2=z_0$ في المجموعة C

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

لتكن النقطة M لاحقتها Z و M' لاحقتها Z' و T تحويل نقطي في المستوى يرفق بكل نقطة M النقطة M' بحيث: $Z' = a.Z + b$ حيث $(a\in C$ و $b\in C)$

قيم a	طبيعة التحويل T	عناصره المميزة
$a=1$	انسحاب	شعاعه $\vec{u}$ لاحقته b
$a\in R^*-\{1\}$	تحاكي	نسبته $k=a$ ومركزه النقطة الصامدة Ω لاحقتها $z_0=\frac{b}{1-a}$
$a\notin R$ و $\|a\|=1$	دوران	مركزه النقطة الصامدة Ω لاحقتها $z_0=\frac{b}{1-a}$ وزاويته: $\theta=\arg(a)$
$a\notin R$ و $\|a\|=1$	تشابه مباشر	مركزه النقطة الصامدة Ω لاحقتها $z_0=\frac{b}{1-a}$ وزاويته: $\theta=\arg(a)$ ونسبته: $k=\|a\|$

تمارين

التمرين 01:

نعتبر العدد المركب $Z=\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

1) أكتب العدد المركب Z على الشكل الجبري .

2) أكتب العدد المركب Z على الشكل المثلثي .

3) أكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية :$\frac{1}{Z}$، Z^{2009} و $\overline{Z}$.

حل التمرين 01:

1) كتابة العدد المركب Z على الشكل الجبري :

$$Z=\frac{4(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{4(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4}=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$$

2) كتابة العدد المركب Z على الشكل المثلثي :

لدينا $Z=(1+i)(1+i\sqrt{3})$

و ليكن $z_1=(1+i)$ و $z_2=(1+i\sqrt{3})$

لدينا $|z_1|=\sqrt{2}$، $Arg(z_1)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in Z$

ومنه $z_1=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$

و $|z_2|=2$ و $Arg(z_2)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in Z$

ومنه $z_2=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$

و $Z=z_1\times z_2$ و منه $|Z|=2\sqrt{2}$

و $Arg(Z)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

أي $Arg(Z)=\frac{7\pi}{12}+2k\pi$ و بالتالي $Z=\left[2\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}\right]$

ومنه $Z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

3) كتابة على الشكل المثلثي : $\frac{1}{Z}$ ، Z^{2009} و $\overline{Z}$.

- لدينا $\frac{1}{Z}=\left[\frac{1}{2\sqrt{2}},\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right]$

و منه $\frac{1}{Z}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

- $Z^{2009}=\left[(2\sqrt{2})^{2009},\frac{7\times 2009\pi}{12}\right]$

ولدينا : $7\times 2009=14063=1171\times 12+11$

أي $14063=1172\times 12-1$

و منه : $\frac{14063\pi}{12}=1172\pi-\frac{\pi}{12}$

و منه : $Z^{2009}=\left[(2\sqrt{2})^{2009},\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

ومنه: $Z^{2009}=(2\sqrt{2})^{2009}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

- $\overline{Z}=\left[2\sqrt{2},\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

و منه $\overline{Z}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

التمرين 02:

عين الطويلة و عمدة للعدد المركب Z في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $Z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

ب) $Z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

ج) $Z=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$.

د) $Z=-2\left(\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}\right)$.

حل التمرين 02 :

تعين طويلة و عمدة العدد المركب Z :

أ) $Z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

و منه: $|Z|=4$ و $Arg(Z)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in Z$

ب) $Z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=3\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=3\left(\cos(\pi+\frac{\pi}{3})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{3})\right)$

و منه $|Z|=3$ و $Arg(Z)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in Z$

ج) $Z=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})\right)$

ومنه $Z=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})\right)$

و منه $|Z|=\sqrt{2}$ و $Arg(Z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in Z$

د) $Z=-2\left(\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(-\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\sin(-\frac{\pi}{6})+i\cos(-\frac{\pi}{6})\right)$

أي $Z=2\left(\cos(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{6}))+i\sin(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{6}))\right)$

ومنه: $Z=2\left(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$

و منه $|Z|=2$ و $Arg(Z)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in Z$

التمرين 03:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$$z^2-8\sqrt{3}.z+64=0$$

2) نعتبر النقطتين A و B لاحقتاها على الترتيب :

$z_A=4\sqrt{3}-4i$ و $z_B=4\sqrt{3}+4i$

أ/ أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي .

ب/ ما طبيعة المثلث OAB .

3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة $z_C=-\sqrt{3}+i$

و لتكن النقطة D حيث : $z_D=e^{-i.\frac{\pi}{3}}.z_C$

- عين لاحقة D

4) نسمي G مرجح الجملة $\{(B,1),(D,1),(O,-1)\}$

أ/ برر وجود G ثم بين أن لاحقتها : $Z_G=4\sqrt{3}+6i$

ب/ أحسب المسافات BG ، DG ، OG .

جـ/ حدد حسب قيم العدد الحقيقي λ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق العلاقة الأتية :

$$BM^2+DM^2-OM^2=\lambda$$



حل التمرين 03 :

1) حل المعادلة : $Z^2-8\sqrt{3}Z+64=0$

نحسب المميز المختصر Δ' :

$$\Delta'=\left(-4\sqrt{3}\right)^2-(1)(64)=-16=(4i)^2$$

وعليه فالمعادلة تقبل حلان متمايزان :

$$Z'=\frac{4\sqrt{3}-4i}{1}=4\sqrt{3}-4i$$

و $$Z''=\frac{4\sqrt{3}+4i}{1}=4\sqrt{3}+4i$$

2) أ/ كتابة كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي :

$z_B=4\sqrt{3}+4i$ و $z_A=4\sqrt{3}-4i$

تعين طويلة وعمدة z_A :

$$|z_A|=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2+(-4)^2}=\sqrt{64}=8$$

و $$Arg(z_A)=\theta:\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{4\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

وعليه فإن : $Arg(z_A)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث: $(k\in Z)$

ومنه الشكل المثلثي لـ z_A : $z_A=8\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

تعين طويلة وعمدة z_B:

بما أن z_A و z_B مترافقان فإن : $|z_B|=|z_A|=8$ ؛

$$Arg(z_B)=-Arg(z_A)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

ومنه فالشكل المثلثي لـ z_B : $z_B=8\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

3) تعيين لاحقة z_D : $z_D=e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)}\cdot z_c$

لدينا: $e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ومنه:

$$z_D=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}=2i$$

أ/ G موجودة لأن : $1+1+(-1)=1\neq 0$ وتحقق

العلاقة $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{0}$ تعيين لاحقة G :

$$z_G=\frac{z_B+z_D-z_O}{1+1+(-1)}=4\sqrt{3}+4i+2i-O=4\sqrt{3}+6i$$

ب/ حساب المسافات $OG;DG;BG$:

$$BG=|z_G-z_B|=\left|4\sqrt{3}+6i-4\sqrt{3}-4i\right|=|2i|=2$$

$$DG=|z_G-z_D|=\left|4\sqrt{3}+6i-2i\right|=\left|4\sqrt{3}+4i\right|$$

$$=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2+(4)^2}=8$$

$$OG=|z_G|=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2+6^2}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$$

جـ) تحديد حسب قيم λ مجموعة النقط M التي تحقق :

$$BM^2+DM^2-OM^2=\lambda$$

لدينا: $BM^2+DM^2-OM^2=\lambda$

$$\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)^2+\left(\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GM}\right)^2-\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GM}\right)^2=\lambda$$

$$BG^2+GM^2+2\cdot\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GM}+DG^2+GM^2+\quad=\lambda$$
$$2\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{GM}-OG^2-2\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{GM}-GM^2$$

$$BG^2+DG^2+-OG^2+2\overrightarrow{GM}\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{OG}\right)+GM^2=\lambda$$

نعلم أن : $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{0}$

ومنه: $GM^2=\lambda-BG^2-DG^2+OG^2$
$$=\lambda-4-8+84=\lambda+72$$

- إذا كان $\lambda=-72$ ، فإن : $GM^2=0$

وعليه فإن مجموعة النقط M هي النقطة G .

- إذا كان $\lambda+72>0$ أي $\lambda>-72$.

فإن مجموعة النقط M هي جميع نقاط الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $r=\sqrt{\lambda+72}$.

- إذا كان $\lambda+72<0$ أي $\lambda<-72$. فإن مجموعة النقط M هي مجموعة خالية .

التمرين 04:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-2z+4=0$.

ثم اكتب حلي هذه المعادلة على الشكل الأسي.

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B، C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=-z_A$.

أ) علم النقط A، B، C.

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$.

جـ) عين طويلة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$ و عمدة له ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3- T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث:

$$z'=(1-i\sqrt{3})z+3-i\sqrt{3}$$

أ) عين طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.

ب) عين صورة النقطة A بالتحويل T.

جـ) استنتج طبيعة التحويل ToT و عناصره المميزة.

حل التمرين 04:

1) حل في C: $z^2-2z+4=0$ ، $\Delta=-12=12i^2$

و منه $z_1=1+i\sqrt{3}$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$

كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي: $|z_1|=|1+i\sqrt{3}|=2$

و $\arg(z_1)=\arg(1+i\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}+2k\pi ...k\in Z$

ومنه $z_1=2e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $z_2=2e^{-\frac{i\pi}{3}}$

2) لدينا: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=-z_A$.

أ) **تعليم النقط** A ، B ، C نعلم أن $A\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$

و $B\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$

ب) **الشكل الجبري لـ** $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$:

$$\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}=\frac{-2i\sqrt{3}}{2}=-i\sqrt{3}$$

جـ) **طويلة** $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$ **و عمدته:** $\left|\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right|=|-i\sqrt{3}|=\sqrt{3}$

و $Arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right)=-\frac{\pi}{2}$

طبيعة المثلث ABC: بما أن $k\in z$...

$$Arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

فان المثلث ABC قائم في B.

3) أ) **طبيعة التحويل** T: لدينا العبارة المركبة للتحويل T:

$$z'=(1-i\sqrt{3})z+3-i\sqrt{3}$$

بما أن $|1-i\sqrt{3}|=2\neq 1$ فان T تشابه نسبته 2 وزاويته $\arg(1-i\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$ و مركزه $z_\Omega=\frac{3-i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=-1-i\sqrt{3}=z_C$

ب) **صورة النقطة A بالتحويل T:**

$$z_B'=(1-i\sqrt{3})z_A+3-i\sqrt{3}$$

أي $z_B'=(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})+3-i\sqrt{3}$

ومنه $z_B'=7-i\sqrt{3}$

جـ) **طبيعة** ToT: بما أن T تشابه فان ToT تشابه نسبته هي $|a|\times|a|=4$ و زاويته هي $\arg(ToT)=-\frac{2\pi}{3}$

التمرين 05:

1- حل في مجوعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z-4)(z^2-8\sqrt{3}z+64)=0$.

2- نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A,B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=4\sqrt{3}-4i$ ، $z_B=4\sqrt{3}+4i$ و $z_C=4$

أ) اكتب z_A و z_B على الشكل الآسي.

ب) أحسب الأطوال OA، OB، AB ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

جـ) D النقطة التي لاحقتها $z_D = -\sqrt{3} + i$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

* عين z_E لاحقة النقطة E.

د) نسمي G مرجح الجملة المثقلة $\{(O;-1);(B;1);(E;1)\}$

* علل وجود النقطة G و بين أن هذه النقطة لاحقتها هي :

$$z_G = 4\sqrt{3} + 6i$$

هـ) بين أن النقط D،E،G على استقامة واحدة.

3- عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث :

$$\|\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$$

حل التمرين 05 :

1) حل في C : $(z-4)(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64) = 0$

$$(z-4)(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64) = 0$$

تكافئ $z = 4$ أو $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

$\Delta = -64 = 64i^2$ و منه $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$,

$z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$ إذن $s = \{4\sqrt{3} + 4i; 4\sqrt{3} - 4i; 4\}$

2) النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ ،

$z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ و $z_C = 4$

أ) كتابة z_A و z_B على الشكل الآسي :

$$|z_B| = |4\sqrt{3} + 4i| = 2$$

و $\arg(z_B) = \arg(4\sqrt{3} + 4i) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi ... k \in Z$

و منه $z_A = 8e^{-\frac{i\pi}{6}}$ و $z_B = 8e^{\frac{i\pi}{6}}$

ب) الأطوال OA , OB , AB : $OA = |z_A| = 8$, $OB = |z_B| = 8$,

$AB = |z_B - z_A| = |8i| = 8$ ومنه المثلث OAB

متقايس الأضلاع

جـ) لتكن : $z_D = -\sqrt{3} + i$

D صورة E بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

معناه $z_E = e^{-\frac{i\pi}{3}} z_D$

$$z_E = (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))(-\sqrt{3} + i)$$

أي $z_E = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\sqrt{3} + i) = 2i$

د) G مرجح الجملة $\{(O;-1);(B;1);(E;1)\}$:

بما أن $-1 + 1 + 1 = 1 \neq 0$ فان G موجودة

لاحقة G هي : $z_G = 4\sqrt{3} + 6i$ ؟

$$z_G = \frac{-z_O + z_B + z_A}{1} = z_B + z_A = 4\sqrt{3} + 6i$$

هـ) النقط D , E , G على استقامة واحدة معناه

$\vec{DE} = \alpha \vec{DG}$ أو $\alpha = \frac{z_E - z_D}{z_G - z_D}$ حيث $\alpha \in R$

$\frac{1}{5} = \frac{\sqrt{3} + i}{5\sqrt{3} + 5i} = \frac{z_E - z_D}{z_G - z_D}$ ومنه النقط D , E , G

على استقامة واحدة.

3) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث :

$$\|\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$$

$$\|\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO}\| = \|\vec{MG}\|$$

و $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{MA} + \vec{BM} = \vec{BA}$

$$\|\vec{ME} + \vec{MB} - \vec{MO}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$$

تكافئ $\|\vec{MG}\| = \|\vec{BA}\|$

تكافئ $MG = BA$ ومنه مجموعة النقط M هي الدائرة

التي مركزها G و نصف قطرها $BA = 8$

التمرين 06:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z حيث : $P(z) = 2z^3 - z + 1$

1) أ) بين أن العدد $1-$ حل للمعادلة $P(z) = 0$.

ب) عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث :

$$P(z) = (z+1)(az^2 + bz + c)$$

ج) حل في المجموعة C المعادلة : $P(z) = 0$ ثم اكتب هذه الحلول على الشكل الأسي.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

النقط A، B، C صور الأعداد المركبة $z_A = -1$، $z_B = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ و $z_C = \overline{z_B}$.

أ) عين اللاحقة z_D للنقطة D مرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C.-1)\}$.

ب) لتكن E صورة B بالتحاكي الذي مركزه C ونسبته 2 و F صورة C بالدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{3\pi}{2}$.

* عين z_E و z_F لاحقتي النقطتين E و F على الترتيب .

حل التمرين 06 :

نعتبر: $P(z) = 2z^3 - z + 1$

1) أ) العدد $(1-)$ حل للمعادلة $P(z)=0$ معناه $P(-1)=0$

ب) $2z^3 - z + 1 = az^3 + (b+a)z^2 + (c+b)z + c$

بالمطابقة نجد :
$$\begin{cases} a = 2 \\ b + a = 0; b = -2 \\ c + b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

ومنه $P(z) = (z+1)(2z^2 - 2z + 1)$

ج) $P(z) = 0$ تكافئ $z + 1 = 0$ أي $(z_0 = -1)$

أو $2z^2 - 2z + 1 = 0$

* $2z^2 - 2z + 1 = 0$ ، $\Delta = -4 = 4i^2$

ومنه $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

z_0, z_1, z_2 على الشكل الأسي :

$$z_0 = e^{i\pi} \text{ ، } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \text{ ، } z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

2) A، B، C صور الأعداد المركبة :

$z_A = -1$، $z_B = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ و $z_C = \overline{z_B}$ حيث $z_C = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

أ) z_D مرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C.-1)\}$ معناه :

$$z_D = \frac{z_A + z_B - z_C}{1+1-1} = -1 + i$$

ب) * E صورة B بالتحاكي الذي مركزه C ونسبته 2

معناه $z_E = 2z_B + (1-2)z_C$

أي $z_E = 2(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

* F صورة C بالدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{3\pi}{2}$

معناه : $z_F = e^{\frac{3\pi}{2}i} z_C + (1 - e^{\frac{3\pi}{2}i}) z_B$

$$= -i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + (1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

التمرين 07:

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة C، المعادلة $z^2 - 6z + 34 = 0$.

2/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها على الترتيب:

$$c = 7 + 3i \quad , \quad b = 3 - 5i \quad , \quad a = 3 + 5i$$

ليكن z لاحقة النقطة M من المستوي و z' لاحقة النقطة M' صورة M بالانسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $4-2i$.

أ) بين أن : $z' = z + 4 - 2i$ ثم تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالانسحاب T .

ب) بين أن : $\frac{b-c}{a-c} = 2i$.

ج) استنتج أن طبيعة المثلث ABC،

حل التمرين 07 :

1/ حلا المعادلة $z^2-6z+34=0$:

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4.(1)(34)=-100=(10.i)^2$

و عليه المعادلة تقبل حلين متمايزين : $Z_1=\frac{6-10.i}{2}$

و $Z_2=\frac{6+10i}{2}$ أي $z_1=3-5i$ و $z_2=3+5i$.

2/ أ) من تعريف الانسحاب : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ و بالانتقال إلى تساوي اللاحقتين نجد :

$z'-z=4-2i$ و منه : $z'=z+4-2i$

ب) $\frac{b-c}{a-c}=\frac{(3-5i)-(7+3i)}{(3+5i)-(7+3i)}$

$=\frac{-4-8i}{-4+2i}\times\frac{-4-2i}{-4-2i}=\frac{40i}{20}=2i$

النقطة C هي صورة النقطة A بالانسحاب T معناه :

$z_C=z_A+4-2i$ وهذا محقق

ج) استنتاج طبيعة المثلث **ABC**: من المساواة $\frac{b-c}{a-c}=2i$

نستنتج أن : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC})=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

من المساواة $\frac{b-c}{a-c}=2i$ نستنتج أن : $\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=|2i|$

أي : $\frac{BC}{AC}=2$ إذن: المثلث ABC قائم في النقطة C

و BC = 2 AC

التمرين 08:

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

(الوحدة $2cm$)

1) حل في C المعادلة : $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$

(اكتب الحلول على الشكل الجبري ثم الأسي)

2) B,A نقطتان لاحقتاهما : $z_A=1+i$ ، $z_B=2i$

من أجل كل عدد مركب z نعتبر العدد المركب z' حيث:

$$z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$$

أ) لتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث $|z'|=1$

❋ عين و أنشئ (F).

ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث يكون z' تخيليا صرفا ، برهن أن : النقطة B تنتمي إلى (E) ثم عين (E).

3) ليكن R الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عين لاحقة B' صورة B بالدوران R .

ب) عين لاحقة I' صورة I بالدوران R حيث: $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

ج) عين صورتي (E)، (F) بالدوران R .

حل التمرين 08 :

1) $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$

معناه : $z=2i$ أو $z^2-z+2=0$

$\Delta=-4$ و جذراه التربيعيان هما $2i$, $-2i$

المعادلة : $z^2-2z+2=0$ تقبل حلين هما : $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i$ و عليه حلول المعادلة :

$(z-2i)(z^2-2z+2)=0$ هي : $2i,1+i,1-i$

ولدينا: $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) أ) $z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$ حيث : $z\neq1+i$.

(F) مجموعة النقط M التي تحقق $|z'|=1$ هي محور القطعة $[AB]$.

ب) (E) هي مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها z' تخيليا صرفا .

❋ إثبات أن B تنتمي إلى (E) ثم تعيين (E) :

$z_{B'}=\frac{2i-2i}{2i-1-i}=0$ و العدد O هو تخيلي صرف

و عليه فإن B تنتمي إلى (E).

* يكون z' تخيليا صرفا إذا كان $z'=0$

او $\arg z' = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z$

و عليه :

$$\begin{cases} z = 2i \\ \text{و} \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in Z \end{cases}$$

والمجموعة (E) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة A.

3) أ) $z' - \left(\frac{3}{2} + i\frac{5}{2}\right) = i\left(z - \frac{3}{2} - i\frac{5}{2}\right)$ هي عبارة الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

$$z_{B'} = i\left(2i - \frac{3}{2} - i\frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{5}{2})$$

ب) $z_{B'} = 2+i$ هي صورة B بالدوران R و بالمثل :

$$Z_{I'} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$$

ج) تعيين صورتي (E) و (F) بالدوران R :

* النقطة I هي منتصف القطعة $[AB]$ أي أن I هي مركز الدائرة (E).

و بما أن الدوران يساوي قياس فإن صورة (E) هي الدائرة (E') التي مركزها I' و لها نفس نصف القطر $\frac{1}{2}AB$.

* صورة F بالدوران R هي محور القطعة $[A'B']$ حيث :

$$B' = R(B) \quad , \quad A' = R(A)$$

التمرين 09:

1) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z حيث:

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$$

أ) بين انه اذاكان z_0 حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فان $\overline{z_0}$ حلا لها ايضا ($\overline{z_0}$ مرافق z_0)

ب) احسب $P(-1)$.ثم بين انه من اجل كل z من C :

$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينها .

ج) حل في C المعادلة $P(z) = 0$

2) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس (O,I,J) نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها :

$z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3} z_C = 2 - i\sqrt{3}$ على الترتيب

أ) احسب $|z_B - z_A|$ ،$|z_C - z_A|$ و $|z_B - z_C|$

استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) عين z_G لاحقة G مرجح الجملة $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$

ج) احسب طويلة وعمدة للعدد المركب $L = \frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$

ثم اكتب L على الشكل الاسي .

د) بين ان L^{2008} عددا حقيقيا موجبا .

هـ) استنتج طبيعة المثلث GAC .

حل التمرين 09 :

1) أ/ إثبات انه اذاكان z_0 حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فان $\overline{z_0}$ حلا لها ايضا:

لدينا: $P(z_0) = z_0^3 - 3z_0^2 + 3z_0 + 7 = 0$

ومنه: $\overline{P(z_0)} = \overline{\left(z_0^3 - 3z_0^2 + 3z_0 + 7\right)} = 0$

ومنه: $\overline{P(z_0)} = \bar{z}_0^3 - 3\bar{z}_0^2 + 3\bar{z}_0 + 7 = 0$

وبما أن: $P(\bar{z}_0) = \bar{z}_0^3 - 3\bar{z}_0^2 + 3\bar{z}_0 + 7$

فإن $P(\bar{z}_0) = 0$

ب/ حساب $P(-1)$:

$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 0$$

تعيين a و b حيث: $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$

لدينا:

$$\begin{aligned} P(z) &= (z+1)(z^2 + az + b) \\ &= z^3 + az^2 + bz + z^2 + az + b \\ &= z^3 + (a+1)z^2 + (b+a)z + b \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a+1=-3 \\ b+a=3 \\ b=7 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=-4 \\ b=7 \end{cases}$

وعليه فإن: $P(z) = (z+1)(z^2-4z+7)$

ج) حل المعادلة $P(z)=0$:

$$P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$$

معناه : $z=-1$ أو $z^2-4z+7=0$

$\Delta=-12=(2\sqrt{3}.i)^2$ و جذراه التربيعيان هما $2\sqrt{3}i$ و $-2\sqrt{3}i$

المعادلة : $z^2-4z+7=0$ تقبل حلين هما :

$$z_1=\frac{4+2\sqrt{3}.i}{2}=2+\sqrt{3}.i \text{ ، } z_1=\frac{4-2\sqrt{3}.i}{2}=2-\sqrt{3}.i$$

و عليه حلول المعادلة $P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$ هي:

-1 ، $2-\sqrt{3}.i$ ، $2+\sqrt{3}.i$.

2) أ/ حساب $|z_C-z_A|$ ، $|z_B-z_A|$ و $|z_B-z_C|$

استنتاج طبيعة المثلث ABC:

$$z_A=-1 \ , z_B=2+i\sqrt{3} \ z_C=2-i\sqrt{3}$$

$$|z_C-z_A|=|3-i\sqrt{3}|=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$$

ومنه: $AC=2\sqrt{3}$

$$|z_B-z_A|=|3+i\sqrt{3}|$$

$$=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$$

ومنه: $AB=2\sqrt{3}$

$$|z_B-z_C|=|2+i\sqrt{3}-2+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

ومنه: $CB=2\sqrt{3}$

نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

ب) تعيين z_G لاحقة G مرجح الجملة $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$:

$$z_G=\frac{-z_A+2z_B+2z_C}{-1+2+2}=3$$

ج) حساب طويلة وعمدة للعدد المركب $L=\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$:

$$\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=\frac{-1-(2-i\sqrt{3})}{3-(2-i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\times\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4i\sqrt{3}}{4}=i\sqrt{3}$$

$$\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}\right)=\arg(i\sqrt{3})$$

$$=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ (k\in Z)$$

$$\left|\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}\right|=\sqrt{3}$$

كتابة $\underline{L}$ على الشكل الاسي: $L=3.e^{\frac{\pi}{2}.i}$

د) إثبات ان L^{2008} عددا حقيقيا موجبا :

$$L^{2008}=\sqrt{3}^{2008}.e^{\frac{2008\pi}{2}.i}$$

$$=\sqrt{3}^{2008}\left(\cos\frac{2008\pi}{2}+i\sin\frac{2008\pi}{2}\right)$$

$$=\sqrt{3}^{2008}(\cos 1004\pi+i\sin 1004\pi)$$

$$=\sqrt{3}^{2008}(\cos 0+i\sin 0)=\sqrt{3}^{2008}=3^{1004}$$

هـ) استنتاج طبيعة المثلث GAC:

بما أن: $\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=\sqrt{3}$ معناه :

$|z_A-z_C|=\sqrt{3}\,|z_G-z_C|$ ومنه $CA=\sqrt{3}CG$

و $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in Z)$

$$\left(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{2}$$

ومنه: نستنتج أن المثلث GAC قائم في النقطة C .

التمرين 10 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2008)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

$Z^2-(1+2i)Z-1+i=0$. نرمز للحلين بالرمز Z_1 و Z_2 حيث :

$|Z_1|\prec|Z_2|$ بين أن : $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

لتكن A , B و C نقط من المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $1,Z_1,Z_2$ ليكن العدد المركب Z حيث :

$.Z=\frac{Z_2-1}{Z_1-1}$

ليكن العدد المركب Z حيث : $.Z=\frac{Z_2-1}{Z_1-1}$

ا) انطلاقا من التعريف : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

و من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

حيث $\theta;\theta_1;\theta_2$ أعداد حقيقية.

ب) أكتب Z على الشكل الأسي .

ج) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A يطلب تعيين زاويته و نسبته.

حل التمرين 10 :

1) -حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

$$Z^2-(1+2i)Z-1+i=0$$

$$\Delta=(1+2i)^2-4(1)(-1+i)=1+4i-4+4-4i=1$$

و منه المعادلة تقبل حلين متمايزين هما :

$$Z'=\frac{1+2i-1}{2}=i \quad Z''=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$$

و بما أن: $|Z_1|\prec|Z_2|$ و لدينا $|i|\prec|1+i|$ فإن: $Z_1=i$ و $.Z_2=1+i$

إثبات أن $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي :

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008}=\left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008}$$

لدينا : $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}\left[\left(\cos 2008\times\frac{\pi}{4}+i\sin 2008\times\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}=\frac{1}{2^{1004}}\in R$$

و عليه فإن $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2- المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A , B و C نقط من المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $1,Z_1,Z_2$ يعني أن $A(1,0);B(0,1);C(1,1)$ و $Z=\frac{Z_2-1}{Z_1-1}$

أ) برهان أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$:

لدينا: $e^{-i\theta}\times e^{i\theta}=e^{i(\theta-\theta)}=e^0=\cos0+i\sin0=1$

و عليه فإن : $.e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$

من جهة أخرى : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times\frac{1}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times e^{-i\theta_2}$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1-i\theta_2}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

ب) كتابة Z على الشكل الأسي :

$$Z=\frac{Z_2-1}{Z_1-1}=\frac{1+i-1}{i-1}=\frac{i}{-1+i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$$Z=\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

ج) كتابة Z على الشكل المثلثي :

لدينا $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

ومنه $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

استنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A يطلب تعيين زاويته و نسبته :

لدينا : $Z=\frac{Z_2-1}{Z_1-1}$ و بالتالي : $z_2-1=z(z_1-1)$

إذن: $z_2-1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right](z_1-1)$

أي أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

التمرين 11:

(بكالوريا علوم تجريبية 2008)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول Z :
$Z^2+iZ-2-6i=0$.

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

النقطتين A , B اللتين لاحقتاهما على الترتيب Z_A, Z_B على الترتيب حيث : $Z_A=2+i$ $Z_B=-2-2i$

عين Z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة Z_C حيث: $Z_C=\frac{4-i}{1+i}$.

أكتب Z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4) أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(Z_0)$ و نسبته K $(K>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(Z)$ النقطة $M'(Z')$ هي : $Z'-Z_0=Ke^{\theta}(Z-Z_0)$

ب- تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل Z

المعرف بـ : $Z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z+\frac{1}{2}i\right)$

حل التمرين 11 :

1/ حل المعادلة : $\Delta=(i)^2-4\times(-2-6i)$

$=-1+8+24i$

$=7+24i$

حساب جذر تربيعي لـ Δ :

نبحث عن عددين حقيقيين x و y حيث :

$(x+iy)^2=7+24i$.

المعادلة $(x+iy)^2=7+24i$ تكافئ :

$x^2-y^2+2ixy=7+24i$

بالإضافة إلى ذلك نستنتج من هذه المعادلة أن :

$\left|(x+iy)^2\right|=|7+24i|$

أي $x^2+y^2=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{625}=25$.

نستنتج أن : $\begin{cases}x^2+y^2=25\\x^2-y^2=7\\2xy=24\end{cases}$

أي أن : $\begin{cases}x^2=\frac{25+7}{2}=16\\y^2=\frac{25-7}{2}=9\\2xy=24\end{cases}$

و منه : x = 4 و y = 3.

جذر تربيعي لـ Δ: 4 + 3i و $z_2=\frac{-i+4+3i}{2}=2+i$

و $z_1=\frac{-i-4-3i}{2}=-2-2i$.

2/ المركز ω للدائرة (Γ) منتصف القطعة $[AB]$:

$$z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2-2i+2+i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

3/ كتابة z_c على شكله الجبري :

$$z_c = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{2} = \frac{4-i-4i-1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) : يكفي أن نثبت أن $\omega C = \frac{AB}{2}$.

$$\frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2-2i-i|}{2}$$

$$= \frac{|-4-3i|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$\omega C = |z_c - z_\omega| = \left|\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i\right| = \left|\frac{3}{2} - 2i\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

نستنتج أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

4/ ا/ تكون النقطة M' صورة لنقطة M تختلف عن M_0 بالتشابه المباشر S الذي مركزه M_0 إذا تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} M_0M' = k \times M_0M \\ \left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

تكافئ :

$$\begin{cases} |z' - z_0| = k \times |z - z_0| \\ \arg\left(\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

يعني أن :

$$\begin{cases} \frac{|z' - z_0|}{|z - z_0|} = k \\ \arg\left(\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

نستنتج أن العددين المركبين $\frac{z' - z_0}{z - z_0}$ و $k(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$ متساويين.

و منه : $\frac{z' - z_0}{z - z_0} = k \times e^{i\vartheta}$

أي $z' - z_0 = k \times e^{i\theta}(z - z_0)$.

نلاحظ أن لاحقة M_0 كذلك تحقق هذه العلاقة.

ب/ التحويل S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة التي لاحقتها $-\frac{1}{2}i$ أي ω و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

التمرين 12 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2009)

$P(Z)$ كثير حدود حيث :

$P(Z) = (Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$ و Z عدد مركب

1) حل في المجموعة C المعادلة $P(Z) = 0$.

2) نضع : $Z_1 = 1+i$ ، $Z_2 = 1-\sqrt{3}\,i$.

أ/ أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي .

ب/ أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

جـ/ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) أ/ n عدد طبيعي ، عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا .

ب/ أحسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$

حل التمرين 12 :

$P(Z)$ كثير حدود حيث :

$$P(Z) = (Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$$

و Z عدد مركب :

1) حل في المجموعة C المعادلة $P(Z)=0$:

$$(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)=0$$

ومنه : $Z-1-i=0$ معناه : $Z=1+i$

أو : $Z^2-2Z+4=0$

$$\Delta'=(-1)^2-(1)(4)=-3=(\sqrt{3}\,i)^2$$

وعليه فإن: $Z'=\frac{1-\sqrt{3}i}{1}=1-\sqrt{3}.i$

و $Z''=\frac{1+\sqrt{3}i}{1}=1+\sqrt{3}.i$

ومنه حلول المعادلة : $S=\{1+i\,;1+i\sqrt{3}\,;1-i\sqrt{3}\}$

2) أ/ كتابة Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي: $Z_1=1+i$

ومنه ($|Z_1|=\sqrt{2}$ و $\arg(Z_1)=\frac{\pi}{4}$) ومنه :

$$Z_1=\sqrt{2}.e^{i.\frac{\pi}{4}}$$

$Z_2=1-\sqrt{3}\,i$ ومنه ($|Z_2|=2$ و $\arg(Z_2)=\frac{-\pi}{3}$)

ومنه : $Z_2=2.e^{-i.\frac{\pi}{3}}$

ب/ الشكل الجبري :

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$$

الشكل الأسي : ($|Z_1|=\sqrt{2}$ و $\arg(Z_1)=\frac{\pi}{4}$)

و ($|Z_2|=2$ و $\arg(Z_2)=\frac{-\pi}{3}$)

ومنه : $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{-\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

وعليه : $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.e^{i.\frac{7\pi}{12}}$

جـ/ لدينا من جهة : $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$

ومن جهة ثانية: $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i.\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\\ \qquad=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\\ \qquad=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$$

3) أ/ $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left[\cos\left(\frac{7\pi.n}{12}\right)+i.\sin\left(\frac{7\pi.n}{12}\right)\right]$

$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا معناه : $\sin\left(\frac{7\pi.n}{12}\right)=0$

أي : $\frac{7\pi.n}{12}=k.\pi$ حيث $(k\in N)$

ومنه : $\frac{7n}{12}=k$ معناه : $7n$ من مضاعفات العدد 12

أي : n من مضاعفات العدد 12 لأن (7 و 12 أوليان فيما بينهما).

ومنه: $n = 12\lambda$ حيث $(\lambda \in N)$

ب/ $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456} = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{12\times 20} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456} = \frac{1}{2^{228}}$

التمرين 13:

(بكالوريا علوم تجريبية 2009)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

$$Z^2 - 2Z + 4 = 0$$

2) نسمي Z_1 ، Z_2 حلي هذه المعادلة .

أ/ اكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي .

ب/ A، B، C هي النقط من المستوى التي لواحقها على الترتيب: $Z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $Z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ،

$$Z_C = \frac{1}{2}\left(5 + i\sqrt{3}\right)$$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2 = -1$)

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ/ جد الطويلة وعمدة العدد المركب Z حيث :

$$Z = \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$$

د/ أحسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

حل التمرين 13 :

1) $Z^2 - 2Z + 4 = 0$

ولدينا: $\Delta' = (-1)^2 - (1)(4) = -3 = \left(\sqrt{3}.i\right)^2$

ومنه: $Z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1} = 1 - i\sqrt{3}$

و $Z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1} = 1 + i\sqrt{3}$

2) أ/ $Z_1 = 1 - i\sqrt{3} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

ومنه : $Z_1 = \sqrt{2}.e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$$Z_2 = 1 + i\sqrt{3} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

ومنه : $Z_2 = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{3}i}$

ب/ $Z_A = 1 - i\sqrt{3}$، $Z_B = 1 + i\sqrt{3}$، $Z_C = \frac{1}{2}\left(5 + i\sqrt{3}\right)$

ومنه : $A\left(1; -\sqrt{3}\right)$ و $B\left(1; \sqrt{3}\right)$ و $C\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$AB = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\sqrt{3} - \left(-\sqrt{3}\right)\right)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\sqrt{3}\right)\right)^2} = 3$$

$$BC = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\sqrt{3}\right)\right)^2} = \sqrt{3}$$

لدينا: $AB^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$ و $AC^2 + BC^2 = 12$

ومنه: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ حسب نظرية فيتاغورث فإن المثلث ABC قائم في C.

جـ/ $|Z| = \left|\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}\right| = \frac{|Z_C - Z_B|}{|Z_A - Z_B|}$

$$|Z_C - Z_B| = \left|\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$|Z_A - Z_B| = |-2i\sqrt{3}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

ومنه: $|Z| = \left|\dfrac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}\right| = \dfrac{|Z_C - Z_B|}{|Z_A - Z_B|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$

• $\arg(Z) = \arg(Z_C - Z_B) - \arg(Z_A - Z_B)$

$$\arg(Z_C - Z_B) = \arg\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

و $\arg(Z_A - Z_B) = \arg(-2i\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه: $\arg(Z) = -\dfrac{\pi}{6} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + 2k\pi = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

حيث : (k عدد صحيح).

د/ $Z^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \left[\cos 3.\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin 3.\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$$= \frac{1}{8}[\cos\pi + i\sin\pi] = -\frac{1}{8}$$

$$Z^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left[\cos 6.\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6.\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{64}[\cos 2\pi + i\sin 2\pi] = \frac{1}{64}$$

$$Z^{3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} \left[\cos 3k.\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 3k.\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} [\cos k\pi + i\sin k\pi]$$

إذا كان : k فردي فإن : $Z^{3k} = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3k}$

و إذا كان : k زوجي فإن : $Z^{3k} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3k}$

التمرين 14 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2010)

نعتبر م م م م م $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب $z_A = 1 + i$ و $z_B = 3i$.

1. أكتب على الشكل الأسي : z_A و z_B .

2. ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-2),(C,2)\}$.

أ) عين z_D لاحقة النقطة D .

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4. لتكن النقطة M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\dfrac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6 + 3i$ تنتمي إلى (Δ) .

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\dfrac{z_B - z}{z_D - z}$ ، عين عندئذ المجموعة (Δ) .

حل التمرين 14 :

1. لدينا $|z_A| = \sqrt{2}$ و $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4}$

و بالتالي: $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $|z_B| = 3$ و $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{2}$

بالتالي : $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

2. أ) نسبة التشابه المباشر هو $2=|2i|$ و زاويته هي $\arg(2i)$ أي $\frac{\pi}{2}$ و مركزه هو النقط ω التي لاحقتها z_0 تحقق : $z_0 = 2iz_0+6+3i$ و منه $\omega = B$

ب) صورة النقطة A بالتشابه تحقق :

$$z_C = 2iz_A+6+3i = 4+5i$$

ج) بما أن C صورة A بالتشابه الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$ فهذا يعني أن المثلث ABC مثلث قائم في B .

3. أ) بما أن D مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-2),(C,2)\}$

فإن: $2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

أي $z_D - z_A = z_C - z_B$ أي : $z_D = 5+7i$.

ب) في الرباعي $ABCD$ لدينا $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و بالتالي فالرباعي متوازي أضلاع و بما أن ABC قائم في B فإن الرباعي $ABCD$ مستطيل.

4. أ) لدينا $\frac{z_B-z_E}{z_D-z_E} = \frac{3i-6-3i}{5+3i-6-3i}$ و هو عدد حقيقي موجب إذن $E\in(\Delta)$.

ب) عمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_E}{z_D-z}$ هو قيس الزاوية $(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB})$.

لدينا بعد وضع $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in R^2$ نجد أن :

$\frac{z_B-z}{z_D-z}\in R_+^*$ تعني $y=3$ مع $x\neq 5$ مع $x^2-5x>0$

أي $x\in]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$ أي مجموعة النقط (Δ) هي تقاطع المستقيم ذي المعادلة $y=3$ باستثناء النقطة $S(5,3)$ مع المجموعة $]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$ أي هي اتحاد نصفي المستقيمين $y=3$ مع $x\in]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$.

التمرين 15 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2010)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2-6z+18=0$ ، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط D,C,B,A لاحقاتها على الترتيب

$z_A = 3+3i$, $z_B = -\bar{z}_A$, $z_C=-z_A$, $z_D=-z_B$

أ) بين أن النقط D,C,B,A تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم .

ب) عين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى النقطة B .

ج) بين أن النقط C,O,A استقامية وكذلك النقط D,O,B .

د) استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

حل التمرين 15 :

1) مميز المعادلة $z^2-6z+18=0$ هو -36 و بالتالي فالعدد $6i$ هو أحد جذري المميز و منه : للمعادلة حلين هما $3-3i$ و $3+3i$

$$3-3i = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{و} \quad 3+3i=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2) أ) لإثبات النقط D,C,B,A تنتمي إلى دائرة مركزها O

نبين أن : $OA=OB=OC=OD$ حيث : $OD=|z_D|$ و $OC=|z_C|$ و $OB=|z_B|$ و $OA=|z_A|$

لدينا: $|z_B|=|\bar{z}_A|=|z_A|$ و $|z_C|=|-z_A|=|z_A|$

و $|z_D|=|-z_B|=|-\bar{z}_A|=|z_A|$

أي أن $OA=OB=OC=OD$ أي أن النقط D,C,B,A تنتمي إلى دائرة مركزها O .

ب) زاوية الدوران R الذي يحول A إلى B هي عمدة العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ أي $\frac{3+3i}{-3-3i}$ أي $-i$ و منه زاوية الدوران هي $-\frac{\pi}{2}$.

ج) النقط C,O,A استقامية تعني أن : $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})=k\pi$ حيث $k\in Z$ أي $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=k\pi$

لدينا $\frac{z_A}{z_C}=\frac{3+3i}{-3-3i}=-1$

و منه $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = -\pi$ مما يعني أن C,O,A استقامية .

و بنفس الطريقة نبين استقامية D,O,B .

د) طبيعة $ABCD$: من النتائج السابقة يتبين لنا قطعتا المستقيم $[AB]$ و $[CA]$ متناصفتان في O و هما أقطار دائرة فهما متقايسين و لدينا $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$ فهذا يعني أن $ABCD$ مربع .

التمرين 16 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2011)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، النقط C,B,A التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = -i$ ، $z_B = 2+3i$ و $z_C = -4+i$.

1) أ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

ب) عين طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = iz - 1 - i$

أ) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

ب) ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

3) لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = -6+2i$.

أ) بين أن النقاط D,C,A في استقامية.

ب) عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى النقطة D .

ج) عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

حل التمرين 16 :

1) أ) كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$:

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-4+i+i}{2+3i+i} = \frac{-4+2i}{2+4i}$$

$$= \frac{-2+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{-2+4i+i+2}{5} = \frac{5i}{5} = i$$

ب) تعيين طويلة وعمدة العدد المركب :

بما أن : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$ و $|i| = 1$ و $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

فإن: $\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$

- طبيعة المثلث ABC : المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في A .

2) أ) تعيين طبيعة التحويل T مع تحديد عناصره المميزة :

التحويل $z' = iz - 1 - i$ من الشكل $z' = az + b$

بما أن $a = i$ فإن : $|a| = 1$ و $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$. و بالتالي التحويل T هو الدوران الذي مركزه ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

حيث : $Z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{-i(1-i)}{1-i} = -i$

و بالتالي التحويل T هو الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ب) صورة النقطة B بالتحويل T هو النقطة C لأن :

$$Z' = i(2+3i) - 1 - i = 2i - 3 - 1 - i$$

$$= -4 + i = Z_C$$

3) أ) إثبات أن النقط D,C,A استقامية :

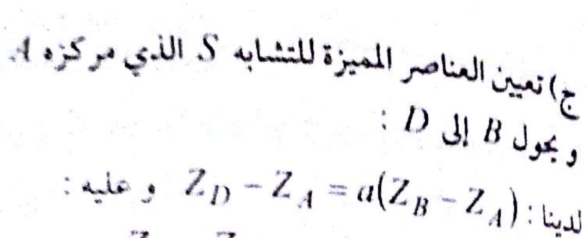
لدينا : $D(-6,2)$ و عليه : $\overrightarrow{AD}(-6,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(-4,2)$

أي : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ و بالتالي النقط D,C,A استقامية.

ب) تعيين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى النقطة D :

$$k = \frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{-6+2i+i}{-4+i+i}$$

$$= \frac{-6+3i}{-4+2i} = \frac{3(-2+i)}{2(-2+i)} = \frac{3}{2}$$



ج) تعيين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى D :

لدينا : $Z_D - Z_A = a(Z_B - Z_A)$ و عليه :

$$a = \frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-6+2i+i}{2+3i+i}$$

$$= \frac{-6+3i}{2+4i} = \frac{3i(1+2i)}{2(1+2i)} = \frac{3}{2}i$$

بما أن : $|a| = \frac{3}{2}$ و $\arg\left(\frac{3}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

فإن التشابه S مركزه A و نسبته $\frac{3}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

التمرين 17 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2011)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، النقط C, B, A التي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_C = 4i \quad , \quad z_B = 3+2i \quad , \quad z_A = 3-2i$$

1) أ) علّم النقط C, B, A .

ب) ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك.

ج) عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2) عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$

3) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 6z + 13 = 0$ نسمي z_1, z_0 حلي هذه المعادلة.

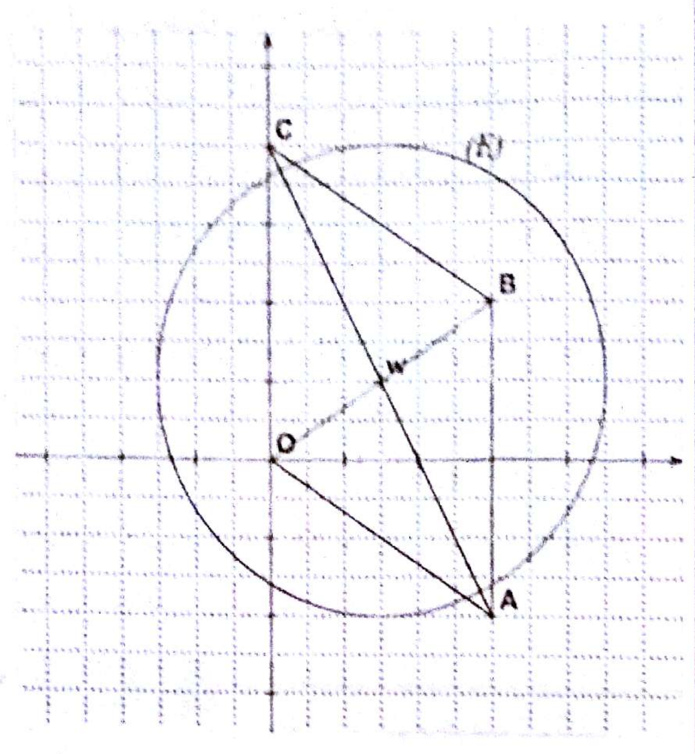
ب) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z .

عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$|z - z_0| = |z - z_1| .$$

حل التمرين 17 :

1) أ) تعليم النقاط :



ب) تعيين طبيعة الرباعي $OABC$:

بما أن : $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_O} = \frac{3+2i-4i}{3-2i} = \frac{3-2i}{3-2i} = 1$

فإن: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ وعليه الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع.

تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$:

$$Z_\Omega = \frac{Z_B + Z_O}{2} = \frac{3+2i}{2} = \frac{3}{2} + i$$

أو

$$Z_\Omega = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{3+2i}{2} = \frac{3}{2} + i$$

2) تعيين و إنشاء المجموعة (E) :

(E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$$

بما أن Ω مركز الرباعي $OABC$ يعني أن :

$$\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} = \vec{O}$$

فإن : $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$ يعني أن

$\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 12$ أي : $M\Omega = 3$

و بالتالي (E) دائرة مركزها Ω و نصف قطرها 3.

3) أ) حل المعادلة ذات المجهول Z :

$Z^2-6Z+13=0$ تعني: $\Delta=(-6)^2-4(13)=-16$

أي : $\Delta=(4i)^2$ و عليه المعادلة تقبل حلين هما :

$$Z_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i \text{ و } Z_0=\frac{6-4i}{2}=3-2i$$

ب) تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

: $|Z-Z_0|=|Z-Z_1|$

$|Z-Z_0|=|Z-Z_1|$ تعني أن : $AM=BM$

و بالتالي مجموعة النقط M هي محور القطعة $[AB]$ أي محور الفواصل.

التمرين 18 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2013)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) ذات المجهول z التالية:

$$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0............(1)$$

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة (1) بـ z_1 و z_2 بين أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C التي لاحقاتها:

$z_A=1+i\sqrt{3}$ و $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B ، C.

ب) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ثم إستنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

ج) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ثم انشئ G.

د) أحسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

حل التمرين 18 :

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) ذات المجهول z التالية: $z^2-(4\cos\alpha)z+4=0.......(1)$

$$\Delta'=(2\cos\alpha)^2-(1)(4)=4\cos^2 x-4$$
$$=4(\cos^2 x-1)=4(-\sin^2 x)=(2i\sin x)^2$$

ومنه حلول المعادلة هي:

$$z''=2\cos\alpha+2i\sin\alpha \quad z'=2\cos\alpha-2i\sin\alpha$$

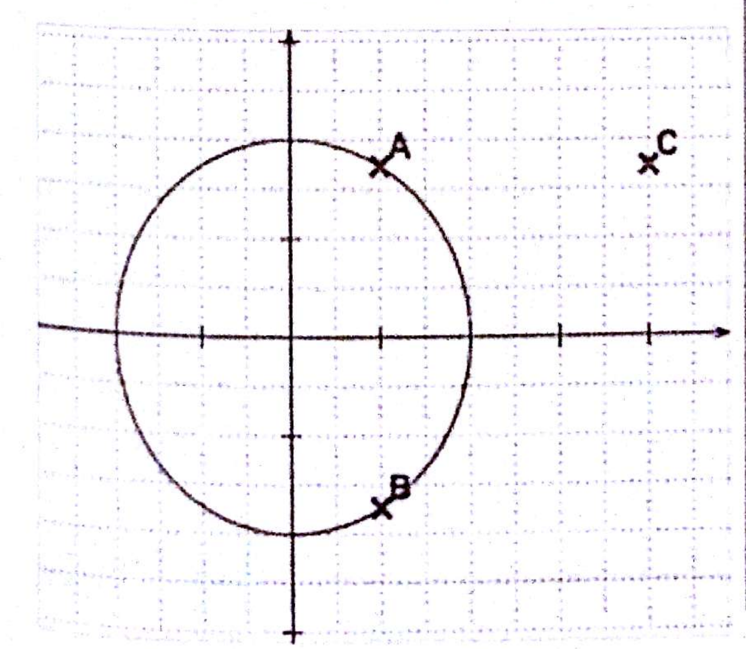
2) من أجل: $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$$z_1=2\cos\frac{\pi}{3}-2i\sin\frac{\pi}{3}=1-i\sqrt{3}$$
$$z_2=2\cos\frac{\pi}{3}+2i\sin\frac{\pi}{3}=1+i\sqrt{3}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right|=1$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$$
$$=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{-2\pi}{3} \quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=\cos\left(\frac{-2\pi\times 2013}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2\pi\times 2013}{3}\right)$$
$$=\cos(1342\pi)-i\sin(1342\pi)=1$$



أ) أنشئ النقط A ، B ، C:

ب/ كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

استنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي

مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته:

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ومنه $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}(z_B - z_A)$

أي من الشكل: $z_M - z_A = a(z_{M'} - z_A)$ و $S(M) = M'$

وبما أن: $|a| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\arg(a) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$

وعليه S تشابه مباشر مركزه A

ونسبته $|a| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وزاويته: $\theta = \arg(a) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$

ج) تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة :

$$\{(A;1),(B;-1);(C;2)\}$$

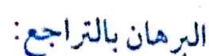
$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{1 - 1 + 2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

د) أحساب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع:

$ABDG$ متوازي أضلاع معناه: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$

ومنه $z_B - z_A = (z_D - z_G)$ ومنه $z_D = z_G + (z_B - z_A) = 4$

المتتاليات العددية



مبدأ الإستدلال بالتراجع: لتكن $P(n)$ خاصية متعلقة بمتغير طبيعي n و n_0 عدد طبيعي معلوم.

للبرهان على صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$

نتبع الخطوات الآتية:

1) نتأكد من صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $n = n_0$.

2) نفرض الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$.

إذا تحققت الخطوتين (1) و (2) فإن الخاصية $P(n)$ تكون صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$.

تمرين تطبيقي: 01

n عدد طبيعي غير معدوم. نعتبر المجموع S_n حيث:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + n$$

1) أحسب S_2 ، S_5.

2) عين عبارة S_{n+1} بدلالة S_n.

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $S_n = \dfrac{n^2+n}{2}$

الحل:

1) $S_2 = 1 + 2 = 3$ و $S_5 = 1+2+3+4+5 = 15$

2) $S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + n + (n+1)$

ومنه: $S_{n+1} = S_n + (n+1)$

3) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in N^*$ فإن $S_n = \dfrac{n^2+n}{2}$:

أ) نتحقق من الخاصية من أجل $n=1$: لدينا:

$1 = \dfrac{2}{2} = \dfrac{1^2+1}{2}$ و $S_1 = 1$ (إذن الخاصية من أجل $n=1$ محققة)

ب) نفرض الخاصية محققة من أجل الرتبة n ونبرهن من أجل الرتبة $n+1$:

أي نفرض أن: $S_n = \dfrac{n^2+n}{2}$

ونبرهن أن: $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+(n+1)}{2}$

أي $S_{n+1} = \dfrac{n^2+3n+2}{2}$

لدينا: $S_{n+1} = S_n + (n+1) = \dfrac{n^2+n}{2} + (n+1)$

$$= \frac{n^2+n+2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

ومنه من أجل $n \in N^*$ فإن $S_n = \dfrac{n^2+n}{2}$.

تمرين تطبيقي: 02

نعتبر المجموع: $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots\dots + (2n-1)$

1) أحسب S_1, S_2, S_3.

2) عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $S_n = n^2$

الحل

1) حساب S_1, S_2, S_3 : $S_1 = 1$ ، $S_2 = 1+3 = 4$ ،
$S_3 = 1+3+5 = 9$

2) • التعبير عن S_{n+1} بدلالة S_n :

$$S_{n+1} = 1+3+5+......+(2n-1)+(2(n+1)-1)$$
$$= S_n + 2n+1$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

فإن : $S_n = n^2 ....(P_n)$

• نتحقق من الخاصية (P_n) من أجل $n=1$:

لدينا : $S_1 = 1^2$ أي : $1=1$ وهذا صحيح .

• نفرض الخاصية (P_n) صحيحة من أجل الرتبة n

أي : $S_n = n^2$ ونبرهن عليها من أجل الرتبة $n+1$

أي نبرهن أن: $S_{n+1} = (n+1)^2$

لدينا: $S_{n+1} = S_n + 2n+1 = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $S_n = n^2$

تمرين تطبيقي 03

n عدد طبيعي ، نضع : $S_n = 1^2+2^2+3^2+.....+n^2$

1) أحسب S_5 ، S_2 .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$S_n = \frac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right)$$

الحل

1) حساب S_5 ، S_2 : $S_2 = 1^2+2^2 = 5$ ،
$S_5 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55$

2) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$S_n = \frac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right).....(P)$$

أ/ نتحقق من الخاصية (P) من أجل $n=0$:

من جهة لدينا : $\frac{1}{6}\times 0\left(2\times 0^2+3\times 0+1\right) = 0$

ومن جهة ثانية لدينا : $S_0 = 0^2 = 0$ ومنه الخاصية (P) محققة من أجل 0

ب/ نفرض الخاصية (P) محققة من أجل الرتبة n

أي : $S_n = \frac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right).....(P)$

ونبرهن عليها من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن أن:

$$S_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)\left(2(n+1)^2+3(n+1)+1\right)$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)$$
$$= \frac{1}{3}n^3+\frac{13}{6}n^2+3n+1$$

لدينا :

$$S_{n+1} = 1^2+2^2+3^2+......+n^2+(n+1)^2 = S_n+(n+1)^2$$

ومنه :

$$S_{n+1} = \frac{1}{6}n\left(2n^2+7n+6\right)+(n+1)^2$$
$$= \frac{1}{6}n\left(2n^2+7n+6\right)+n^2+2n+1$$
$$= \frac{1}{3}n^3+\frac{13}{6}n^2+3n+1$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$S_n = \frac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right).....(P) .$$

تذكير حول المتتاليات العددية :

1) تعريف : نسمي متتالية عددية، كل دالة لمجموعة الأعداد الطبيعية أو جزء منها في مجموعة الأعداد الحقيقية .

نرمز لمتتالية عددية برموز من الشكل: (u_n)، (v_n)، (w_n) ..الخ.

2) اتجاه تغير متتالية عددية :

يعرف اتجاه تغير متتالية (u_n) بدراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n. و عليه تكون المتتالية العددية (u_n) :

(u_n) متزايدة تماما إذا كان من أجل كل n فإن: $u_{n+1}-u_n>0$

(u_n) متناقصة تماما إذا كان من أجل كل n فإن: $u_{n+1}-u_n<0$

(u_n) ثابتة إذا كان من أجل كل n فإن: $u_{n+1}-u_n=0$

3) المتتالية المحدودة من الأعلى :

(u_n) محدودة من الأعلى إذا كان من أجل كل n فإنه يوجد عدد حقيقي ثابت A بحيث تكون: $u_n \le A$.

المتتالية المحدودة من الأسفل :

(u_n) محدودة من الأسفل إذا كان من أجل كل n فإنه يوجد عدد حقيقي ثابت A بحيث تكون: $u_n \ge A$.

4) المتتالية المتقاربة :

تعريف 01: إذا كانت المتتالية معرفة بحدها العام u_n وكانت: $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ حيث l عدد حقيقي ثابت فإن المتتالية (u_n) تكون متقاربة .

تعريف 02: إذا كانت (u_n) محدودة من الأعلى و متزايدة أو إذا كانت (u_n) محدودة من الأسفل و متناقصة فإن المتتالية (u_n) تكون متقاربة .

ملاحظة: لإثبات أن متتالية (u_n) محدودة بالعدد A يمكن دراسة إشارة الفرق $u_n - A$ ، أو نبرهن بالتراجع ، و إذا كانت $u_n=f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$.

5) المتتاليات الحسابية و الهندسية :

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف	$u_{n+1}=u_n+r$ / r ثابت حقيقي.	$u_{n+1}=u_n\times q$ / q ثابت حقيقي
عبارة الحد العام	$u_n=u_0+nr$ إذا كان u_0 هو الحد الأول. $u_n=u_p+(n-p)r$ إذا كان u_p حدا من حدودها	$u_n=u_0\times q^n$ إذا كان u_0 هو الحد الأول. $u_n=u_p\times q^{n-p}$ إذا كان u_p حدا من حدودها.
عبارة المجموع	$S=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$	$S_n=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$ $=u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right), q\neq1$
خاصية ثلاث حدود متتابعة	$a+c=2b$	$a\times c=b^2$

6) نهاية متتالية هندسية :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q حدها العام:

1) إذا كان: $q>1$ و $u_0\neq0$ فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n=\infty$ وتكون المتتالية (u_n) متباعدة.

2) إذا كان: $q=1$ فإن المتتالية (u_n) تكون ثابتة و $\lim_{n\to+\infty} u_n=u_0$

3) إذا كان: $-1<q<1$ فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ وتكون المتتالية (u_n) متقاربة.

4) إذا كان: $q\le-1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة وليست لها نهاية .

7) المتتاليتان المتجاورتان :

(u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان إذا تحقق ما يلي :

1) (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة

2) $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$

نظرية: إذا كانت (u_n) و (v_n) متجاورتان فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n=a$ حيث a عدد حقيقي ثابت

8) التمثيل البياني لحدود متتالية المعرفة بالعلاقة التراجع

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

1) ننشئ (C_f) التمثيل البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) فإن مجموعة النقط $M(u_n;u_{n+1})$ هي نقاط من (C_f) .

2) ننشئ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

3) نعين أول نقطة $M_0(u_0;u_1)$.

4) نسقط $M_0(u_0;u_1)$ على (Δ) وفق (Ox) فنحصل على نقطة A_0 .

5) نسقط A_0 على (C_f) وفق (Oy) فنحصل على النقطة $M_1(u_1;u_2)$.

وهكذا نكرر العملية فنحصل على جميع النقاط : $M_2(u_2;u_3)$ ، $M_3(u_2;u_3)$ ، ...

تمارين

التمرين 01:

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right)$$

2) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$P(n)\ldots\ldots\ldots\quad 0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3) نضع: $t_n=1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+n(n+1)$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$t_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

حل التمرين 01:

1) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right)\ldots(P)$$

• نتحقق من الخاصية (P) من أجل $n=0$: من جهة لدينا : $\frac{1}{6}\times0\left(2\times0^2+3\times0+1\right)=0$ ومن جهة ثانية لدينا :

$$0^2=0$$

ومنه الخاصية (P) محققة من أجل $n=0$.

• نفرض الخاصية (P) محققة من أجل الرتبة n أي :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right)\ldots(P)$$

ونبرهن عليها من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن أن :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2+(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\left(2(n+1)^2+3(n+1)+1\right)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)$$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{13}{6}n^2+3n+1$$

لدينا : $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+n^2+(n+1)^2$

$$=\left(\frac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right)\right)+(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}n\left(2n^2+7n+6\right)+(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}n\left(2n^2+7n+6\right)+n^2+2n+1$$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{13}{6}n^2+3n+1$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=\frac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right)$$

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$P(n)\ldots\ldots\ldots\quad 0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

• نتحقق من الخاصية $P(n)$ من أجل $n=0$:

$$0^3=\frac{0^2(0+1)^2}{4}$$

أي: $0=0$ ومنه الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n=0$

• نفرض أن من أجل الرتبة n أي :

$$0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ونبرهن أن:

$$0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$$

لدينا:

$$0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$

لأن حسب فرضية التراجع

$$0^3+1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

إذن: $0^3+1^3+....+n^3+(n+1)^3$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)(n+1)^2$$

$$=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)$$

$$=(n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4}=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$$

إذن: الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة: من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$10^3+1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $t_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

- من أجل $n=1$ لدينا $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{3}(2)(3)=2$ و $t_1=2$ إذن: الخاصية محققة من أجل $n=1$
- نفرض أن $t_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ من أجل $n\rangle 1$

هل $t_{n+1}=\frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$

لدينا:

$$t_{n+1}=1\times2+2\times3+...+n(n+1)+(n+1)(n+2)$$

$$=t_n+(n+1)(n+2)$$

حسب الفرضية لدينا: $t_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

ومنه: $t_{n+1}=(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right)$

$$=\frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$$

إذن: الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نستنتج انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$t_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

التمرين 02:

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}=2u_n-3$$

1) أحسب $u_5;u_4;u_3;u_2;u_1$

2) أحسب $3-u_0$ و $3-u_1$ و $3-u_2$ و $3-u_3$ ثم أعط تخمينا حول عبارة $3-u_n$ بدلالة n ثم برهن صحتها بالتراجع.

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n

حل التمرين 02:

1) $u_1=2u_0-3=2(2)-3=1$

$$u_2=2u_1-3=2(1)-3=-1$$

$$u_3=2u_2-3=2(-1)-3=-5$$

$$u_4=2u_3-3=2(-5)-3=-13$$

$$u_5=2u_4-3=2(-13)-3=-29$$

2) لدينا: $3-u_0=3-2=1=2^0$

$$3-u_1=3-1=2=2^1$$

$$3-u_2=3+1=4=2^2$$

$$3-u_3=3+5=8=2^3$$

$$3-u_4=3+13=16=2^4$$

$$3-u_5=3+29=32=2^5$$

نستنتج أن: $3-u_n=2^n$ ولنبرهن هذه الخاصية بالتراجع:

لدينا الخاصية محققة من أجل $n=0$ لأن: $3-u_0=2^0$

أي: $1=1$

نفرض أن $3-u_n=2^n$ من أجل الرتبة n ونبرهن على صحة الخاصية من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن أن:

$$3-u_{n+1}=2^{n+1}$$

لدينا: $3-u_{n+1}=3-(2u_n-3)=6-2u_n$

$$=2(3-u_n)=2\times2^n=2^{n+1}$$

(لأن $2^n = 3 - u_n$ حسب الفرضية)

إذن: الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة: من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2^n = 3 - u_n$

3) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n :

$3 - u_n = 2^n$ إذن $u_n = 3 - 2^n$

التمرين 03:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r ، حدها الرابع يساوي 3 و حدها الخامس يساوي 5 .

1) أوجد الأساس r و حدها الأول u_0 .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3) هل العدد 37 حدا من حدود المتتالية (u_n) ، إذا كان حدا ما رتبته .

4) أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{20}$

5) أحسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n.

حل التمرين 03 :

1) إيجاد الأساس r و حدها الأول u_0 :

لدينا : حدها الرابع يساوي 3 معناه : $u_3 = 3$ و حدها الخامس يساوي 5 معناه : $u_4 = 5$.

ونعلم أن : $u_4 = u_3 + r$ لأن (u_n) متتالية حسابية .

ومنه : $r = u_4 - u_3 = 5 - 3 = 2$

ولدينا : $u_3 = u_0 + 3.r$ ومنه : $3 = u_0 + 6$

ومنه $u_0 = -3$

2) عبارة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = u_0 + n.r$

ومنه : $u_n = -3 + 2n$

3) نضع : $u_n = 37$ ومنه $-3 + 2n = 37$

ومنه $n = 20$

ومنه: القيمة 37 حدا من حدود المتتالية (u_n) حيث $u_{20} = 37$ ورتبته 21

4) حساب المجموع : $S = u_0 + u_1 + u_2 + ...+ u_{20}$

$$S = \frac{20-0+1}{2}.(u_0 + u_{20}) = \frac{21}{2}(-3+37) = 357$$

5) حساب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

$$S_n = \frac{n-0+1}{2}.(u_0 + u_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}(-3+-3+2n)$$

$$= (n+1)(-3+n)$$

التمرين 04:

$(u_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية حدودها موجبة بحيث :

$u_3 + u_5 = 20$ و $u_1 = 1$

1) أوجد أساس هذه المتتالية وحدد اتجاه تغيرها .

2) أحسب بدلالة n المجموع : $u_1 + u_2 .... u_n$

لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي :

$v_n = 3 \cdot u_n^2 + 2 \cdot 3^n$

3) أحسب بدلالة n المجموع $u_1^2 + u_2^2 .... + u_n^2$

ثم أحسب المجموع S_n حيث $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

حل التمرين 04 :

1) إيجاد أساس المتتالية (u_n) :

لدينا: $u_3 + u_5 = 20$ ونعلم أن $u_n = u_p.q^{n-p}$

ومنه $u_3 = u_1.q^2$ و $u_5 = u_1.q^4$

ومنه: $u_1.q^2 + u_1.q^4 = 20$ ومنه: $q^2 + q^4 = 20$

أي $q^4 + q^2 - 20 = 0$

نضع: $x = q^2$ حيث $(x > 0)$

فنحصل على : $x^2 + x - 20 = 0$

ومنه: $(x+5)(x-4) = 0$ أي: $x = 4$ او $x = -5$

ومنه: $q^2=4$ ومنه $q=2$ لأن: ((u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة).

وتحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n): بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة و $q=2>1$ فإن (u_n) متزايدة.

2) حساب بدلالة n المجموع: $u_1+u_2........u_n$:

$$u_1+u_2........u_n=u_1.\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $u_1^2+u_2^2...+u_n^2$

$$u_1^2+u_2^2...+u_n^2=u_1^2+(u_1q)^2+(u_1q^2)^2+...+(u_1q^{n-1})^2$$

$$=u_1^2\left(1+(q^2)^1+(q^2)^2+...(q^2)^{n-1}\right)=u_1^2\left[\frac{(q^2)^n-1}{q^2-1}\right]=\frac{4^n-1}{3}$$

حساب المجموع S_n حيث $S_n=v_1+v_2+....+v_n$ و $v_n=3\cdot u_n^2+2\cdot 3^n$

$$S_n=v_1+v_2+...+v_n$$
$$=(3\cdot u_1^2+2\cdot 3^1)+(3\cdot u_2^2+2\cdot 3^2)$$
$$+...3\cdot u_n^2+2\cdot 3^n$$
$$=3\left(u_1^2+u_2^2...+u_n^2\right)+2\left(3^1+3^2+...+3^n\right)$$
$$=4^n-1+2\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=4^n+3^{n-1}-2$$

التمرين 05:

(u_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي:

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad u_0=0$$

1) أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0\le u_n\le 1$ ثم بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي: $v_n=u_n-1$

أ/• بين أن (v_n) متتالية هندسية.

ب/• عبر عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n.

ج/• عين نهاية u_n و v_n.

3) أحسب بدلالة n المجموعين: Y_n و S_n حيث:

$$Y_n=v_0+v_1+...+v_n \quad \text{و} \quad S_n=u_0+u_1+...+u_n$$

حل التمرين 05:

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le 1$

• نتحقق من الخاصية من أجل $n=0$:

$0\le u_0\le 1$ أي $0\le 0\le 1$ وهذا محقق.

• نفرض الخاصية محققة من أجل الرتبة n ونبرهن على صحتها من أجل الرتبة $n+1$:

أي نفرض أن $0\le u_n\le 1$ ونبرهن أن $0\le u_{n+1}\le 1$.

لدينا: $0\le u_n\le 1$ (نضرب المتباينة المضاعفة بالعدد $\frac{2}{3}$)

نحصل على: $0\le \frac{2}{3}u_n\le\frac{2}{3}$ (نضيف للمتباينة المضاعفة العدد $\frac{1}{3}$)

نحصل على: $\frac{1}{3}\le\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}\le 1$

ومنه: $\frac{1}{3}\le u_{n+1}\le 1$ (نعلم أن $0\le\frac{1}{3}$)

ومنه: $0\le u_{n+1}\le 1$

2) إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}-u_n$$
$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)u_n+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}$$
$$=-\frac{1}{3}(u_n-1)$$

وبما أن: $u_n\le 1$ (من السؤال 2) ومنه: $u_n-1\le 0$

ومنه: $\frac{-1}{3}(u_n-1)\ge 0$ أي: $u_{n+1}-u_n\ge 0$

أي : (u_n) متزايدة تماما.

3) بفرض المتتالية متقاربة أي : $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$

(حيث L عدد حقيقي ثابت)

إيجاد نهاية المتتالية (u_n) : لدينا : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = L$

ومنه : $L = \frac{2}{3}L + \frac{1}{3}$

أي $-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}L - L$ أي : $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}L$ أي : $L = 1$

ومنه : $S_n = -3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + n + 1$.

5) • لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 1$

• إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب أساسها و حدها الأول:

(v_n) متتالية هندسية إذا تحقق ما يلي: $v_{n+1} = v_n \times q$

(q عدد حقيقي ثابت)

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1$

$$= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 1) = \frac{2}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها : $q = \frac{2}{3}$.

وحدها الأول : $v_0 = u_0 - 1 = 0 - 1 = -1$.

• عبارة u_n و v_n بدلالة n :

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $v_n = v_0 q^n$

ومنه : $v_n = -1\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ولدينا : $v_n = u_n - 1$ ومنه: $u_n = v_n + 1$

أي : $u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$

• تعيين نهاية u_n و v_n : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right] = 1$ و (لأن $|q| \leq 1$)

6) • حساب بدلالة n المجموعين : Y_n و S_n

لدينا : $Y_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$= -1\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = -3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$
$$= (v_0+1) + (v_1+1) + ... + (v_n+1)$$
$$= v_0 + v_1 + ... + v_n + (1+1+1+....+1)$$
$$= Y_n + n + 1$$

التمرين 06:

(u_n) متتالية معرفة على N بـ : $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$

1- أحسب u_1, u_2.

2- α عدد حقيقي غير معدوم،من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n + \alpha$

أ) عين قيمة العدد α التي تكون من اجلها المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب) عبر عن u_n بدلالة n.

3- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4- أ) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$$s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

ب) استنتج $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n}$.

حل التمرين 06 :

1) $u_1 = \frac{u_0 - 1}{2} = 0$ و $u_2 = \frac{u_1 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$

2) $\alpha \neq 0$ ، من اجل كل عدد طبيعي n نضع :

$v_n = u_n + \alpha$

أ) قيمة α التي تكون من اجلها المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

(v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{u_n - 1}{2} + \alpha = \frac{u_n - 1 + 2\alpha}{2}$$

$v_{n+1} = \frac{u_n + \alpha + (\alpha - 1)}{2}$ تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ إذا و فقط إذا كان $\alpha - 1 = 0$ أي $\alpha = 1$

ب) u_n بدلالة n : نعلم أن $v_n = v_0 q^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و $v_0 = u_0 + 1 = 2$

بما أن $v_n = u_n + 1$ فان $u_n = v_n - 1$

و عليه $u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$

3) اتجاه تغير (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) - \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{-1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N

4- أ) المجموع s_n : $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

معناه $s_n = (v_0 - 1) + (v_1 - 1) + \dots + (v_n - 1)$

$$s_n = v_0 \times \frac{(\frac{1}{2})^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} - 1(n+1)$$

أي $s_n = -4 \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right] - 1(n+1)$

و عليه $s_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n + 3$

ب) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{s_n}{n} = -1$ لان $-1 < q < 1$ و $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

التمرين 07:

(u_n) متتالية معرفة على N بـ : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

1-أ) عين العدد الحقيقي a بحيث تكون (u_n) متتالية ثابتة.

ب) أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (D) الممثل للدالة f المعرفة على R بـ : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

جـ) نضع : $a = 0$ باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4.

2 - نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N بـ : $v_n = u_n - 2$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3- أ) أحسب بدلالة n المجموعين s_n و L_n حيث :

$L_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

ب) أحسب الجداء P حيث : $P = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_9$

حل التمرين 07 :

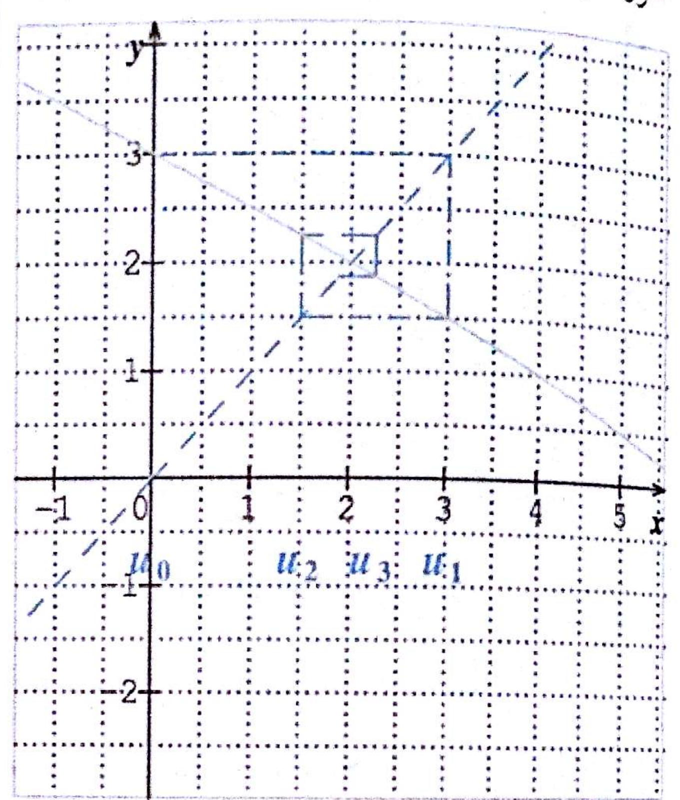
1) أ) (u_n) متتالية ثابتة معناه $u_{n+1} = u_n = \dots = u_1 = u_0$

$u_{n+1} = \frac{-1}{2}u_n + 3$ تكافئ $u_0 = \frac{-1}{2}u_0 + 3$

ومنه $u_0 = 2 = a$

ب) رسم $y = x$ و المنحنى (D) الممثل للدالة f المعرفة على R بـ : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

جـ) نضع : $u_0=0$ الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 على حامل محور الفواصل .



2) نعتبر : $v_n = u_n - 2$

أ) (v_n) متتالية هندسية معناه $v_{n+1} = qv_n$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 1 = -\frac{1}{2}(u_n - 2)$$

ومنه $q = -\frac{1}{2}$ و $v_0 = u_0 - 2 = -2$

ب) v_n بدلالة n: بما أن $v_n = v_0 \times q^n$

فان $v_n = -2\times(\frac{-1}{2})^n$

u_n بدلالة n: بما أن $v_n = u_n - 2$ فان $u_n = v_n + 2$

وعليه $u_n = -2\times(\frac{-1}{2})^n + 2$

جـ) (u_n) متقاربة : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +2$

لان $-1 < q < 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

3) أ) المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

معناه $s_n = (-2)\times\frac{(\frac{-1}{2})^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1}$

أي $s_n = \frac{4}{3}\times\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$

المجموع L_n بدلالة n حيث : $L_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

معناه $L_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + ... + (v_n + 2)$

أي $L_n = S_n + 2(n+1)$ أي $L_n = \frac{4}{3}\times\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} - 1\right] + 2n + 2$

ومنه $L_n = \frac{4}{3}\times\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}\right] + 2n + \frac{2}{3}$

ب) الجداء P حيث : $P = v_0 \times v_0 q \times .... \times v_0 q^9$

أي $P = v_0^{10} q^{0+1+2+....+9}$ ($0+1+2+....+9$ مج متتالية حسابية) .

$$P = (-2)^{10}(-\frac{1}{2})^{45}$$

ومنه $P = (-2)^{10}(-)^{-45} = (-2)^{-35}$

التمرين 08:

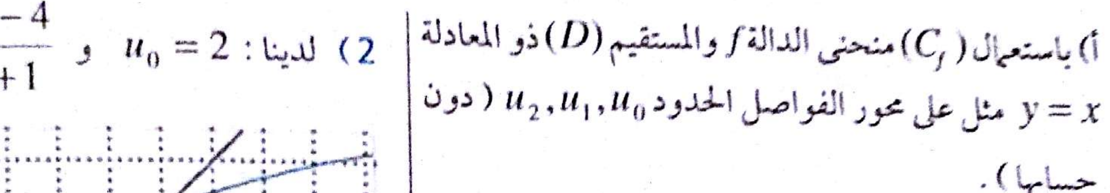
نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1;4]$ بالعبارة :

$$f(x) = \frac{6x-4}{x+1}$$

1- ادرس تغيرات الدالة f و استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I فان $f(x) \in I$.

2- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على N كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$$



أ) باستعمال (C_f) منحنى الدالة f والمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ مثل على محور الفواصل الحدود u_2, u_1, u_0 (دون حسابها) .

* ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$1 \le u_n \le 4$$

جـ) بين أن (u_n) متزايدة تماما استنتج أنها متقاربة .

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة N بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ) عبر بدلالة بدلالة n عن المجموع S_n حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$$

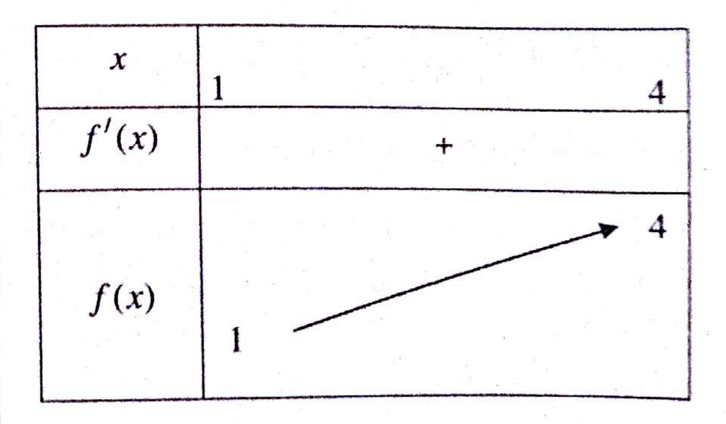
حل التمرين 08 :

1) الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال I و لدينا :

$$f'(x) = \frac{6+4}{(x+1)^2} = \frac{10}{(x+1)^2}$$

بما أن $f'(x) > 0$ فان الدالة f متزايدة تماما على المجال I

و لدينا :

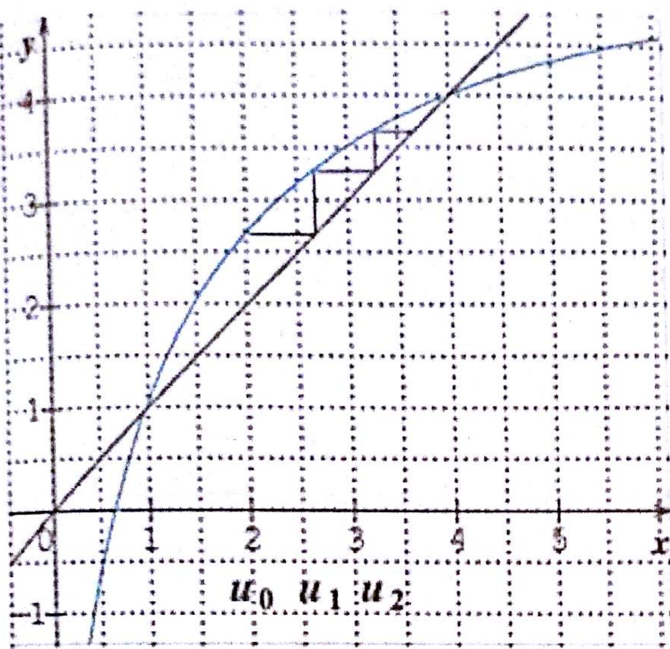


x	1 $\qquad\qquad$ 4
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 ↗ 4

من جدول تغيرات الدالة f ستنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I فان $f(x) \in I$.



2) لدينا : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{6u_n - 4}{u_n + 1}$



* التخمين : (u_n) متتالية متزايدة تماما .

ب) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$1 \le u_n \le 4$$

من اجل $n=0$ $\quad 1 \le u_0 \le 4$ أي $1 \le 2 \le 4$

جـ) (u_n) متزايدة تماما : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 5u_n - 4}{u_n + 1}$

أي $\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 4)}{u_n + 1}$

بما أن $u_n - 4 \le 0$ و $u_n - 1 \ge 0$

فان: $\dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 4)}{u_n + 1} \ge 0$ وبالتالي (u_n) متزايدة تماما.

بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

3) أ) (v_n) متتالية هندسية أساسها q معناه

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{6u_4 - 4}{u_n + 1} - 4}{\frac{6u_n - 4}{u_n + 1} - 1} \text{ أي } v_{n+1} = \frac{\frac{2u_4 - 8}{u_n + 1}}{\frac{5u_n - 5}{u_n + 1}} = \frac{2}{5} v_n$$

$v_0 = \dfrac{u_0 - 4}{u_0 - 1} = -2$ و منه (v_n) م هـ أساسها $q = \dfrac{2}{5}$

و حدها الأول $v_0 = -2$

ب) v_n بدلالة n: $v_n = v_0 q^n = -2\left(\frac{2}{5}\right)^n$

بما أن $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 1}$ فان $u_n = \frac{v_n - 4}{v_n - 1}$

و منه $u_n = \frac{-2\left(\frac{2}{5}\right)^n - 4}{-2\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}$

جـ) $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = v_0 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$

أي $S_n = -2 \times \frac{(\frac{2}{5})^n - 1}{\frac{2}{5} - 1} = \frac{10}{3}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right]$

التمرين 09:

a ;b ;c أعداد حقيقة غير معدومة

1) بين أن إذا كانت a ;b ;c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a - b + c)$$

2) أوجد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276.

حل التمرين 09:

1) لدينا: $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + 2ac - b^2 + c^2$

إذا كانت a ;b ;c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن حسب الوسط الهندسي لدينا: $ac = b^2$

ومنه: $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + 2b^2 - b^2 + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2$

2) لتكن a ;b ;c بهذا الترتيب هذه الأعداد المطلوبة إذن:

$$\begin{cases} a + b + c = 78 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3276 \end{cases}$$

لكن حسب السؤال (1) فإن:

$a^2 + b^2 + c^2 = (a;b + c)(a - b + c)$

أي: $3276 = 78(a - b + c)$ أي:

$a - b + c = 3276/78$ أي: $a - b + c = 42$

لدينا إذن الجملة $\begin{cases} a + b + c = 78 ......(1) \\ a - b + c = 42 ......(2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نحصل على: $2b = 36$ أي: $b = 18$

ليكن k أساس هذه المتتالية الهندسية حيث $k \in IR^*$

لدينا $a = b/k = 18/k$ و $c = bk = 18k$

إذن المساواة (1) تصبح: $\frac{18}{k} + 18 + 18k = 78$

نضرب الطرفين في k: أي: $18 + 18k + 18k^2 = 78k$

ومنه: $3k^2 - 10k + 3 = 0$ $\Delta = 100 - 36 = 64$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ k_2 = \frac{10 + 8}{6} = \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

لنحتار مثلا: $k = 3$ إذن: $c = 18 \times 3 = 54$ $a = 18/3 = 6$

تحقيق: $\begin{cases} a + b + c = 6 + 18 + 54 = 78 \\ a - b + c = 6 - 18 + 54 = 42 \end{cases}$

لاحظ أن من أجل $k = 1/3$ نحصل على:

$a = 54$ و $b = 18$ و $c = 6$

خلاصة: الأعداد المطلوبة هي:

$(a;b;c) = (6;18;54)$ أو $(a;b;c) = (54;18;6)$

التمرين 10:

$(u_n)_{n \in N^*}$ متتالية هندسية متناقصة حيث:

$u_1 \times u_2 \times u_3 = 64$ و $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84$

1) أحسب الحدود: u_2 ثم u_3 ; u_1 والأساس q للمتتالية.

2) عبر عن u_n بدلالة n وأدرس تقارب المتتالية $(u)_{n \in N^*}$.

3) أحسب بدلالة n المجموع S حيث:

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

4) أحسب بدلالة n المجموع S' حيث:

$$S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}.$$

حل التمرين 10 :

1) حساب الحدود : u_2 ثم u_3 ; u_1 والأساس r للمتتالية (u_n) :

لدينا: $u_1 \times u_2 \times u_3 = 64$.......(1) ولدينا حسب خاصية الوسط الهندسي على الحدود $u_1 ; u_2 ; u_3$ فإن:

$u_2^2 = u_1 \times u_3$

وعليه تصبح العلاقة (1): $u_2^3 = 64$ ومنه: $u_2 = 4$

ولدينا: $\begin{cases} u_1.u_2.u_3 = 64 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} u_1.4.u_3 = 64 \\ u_1^2 + 16 + u_3^2 = 84 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} u_1.u_3 = 16 \\ u_1^2 + u_3^2 = 68 \end{cases}$

من المعادلة $u_1 \times u_3 = 16$ فإن: $u_1 = \dfrac{16}{u_3}$

نعوض u_1 في المعادلة $u_1^2 + u_3^2 = 68$

نجد: $\dfrac{256}{u_3^2} + u_3^2 = 68$ ومنه: $\dfrac{256 + u_3^4}{u_3^2} = 68$

أي: $u_3^4 - 68u_3^2 + 256 = 0$ نضع: $x = u_3^2$

تصبح المعادلة: $x^2 - 68x + 256 = 0$

وبعد حساب المميز Δ نجد : $x_1 = 4$ أو $x_2 = 64$

- لما $x_1 = 4$ فإن: $u_3^2 = 4$ ومنه: $u_3 = 2$ أو $u_3 = -2$
- لما $x_2 = 64$ فإن: $u_3^2 = 64$ ومنه: $u_3 = 8$ أو $u_3 = -8$

بما أن (u_n) متتالية هندسية متناقصة و $u_2 = 4$

فإن $u_3 = 8$ و $u_1 = \dfrac{16}{u_3} = 2$

حساب الأساس q: $q = \dfrac{u_2}{u_1} = 2$

2) • التعبير عن u_n بدلالة n:

$$u_n = u_1.q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

• دراسة تقارب المتتالية $(u)_{n\in N^*}$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ وعليه فإن المتتالية $(u)_n$ متباعدة.

3) أحسب بدلالة n المجموع S حيث :

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

$$S_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 2 \times \frac{1-(2)^n}{1-2} = -2\left[1-(2)^n\right]$$

4) حساب بدلالة n المجموع S':

$$S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1.q} + \frac{1}{u_1.q^2} + ... + \frac{1}{u_1 q^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{u_1}\left[\frac{1}{q^0} + \frac{1}{q^1} + \frac{1}{q^2} + ... + \frac{1}{q^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{q}\right)^0 + \left(\frac{1}{q}\right)^1 + \left(\frac{1}{q}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{q} \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

التمرين 11 :

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1) أ/ أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1 .

ب/ أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ/ أحسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n$

بدلالة n.

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 728$.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ/ أحسب v_2 و v_3 .

ب/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$$

بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ/ أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

حل التمرين 11 :

1) أ/ بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن $u_1 \times u_3 = (u_2)^2$.

ومنه : $(u_2)^3 = 216$ أي : $u_2 = 6$.

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

ومنه : $\begin{cases} u_1 + 2\times 6 + u_3 = 32 \\ u_1 \times 6 \times u_3 = 216 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} u_1 + u_3 = 20 \dots\dots\dots(1) \\ u_1 \times u_3 = 36 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$

من (1) : $u_3 = 20 - u_1$ نعوض u_3 في (2) نجد :

$$u_1(20 - u_1) = 36$$

$$-u_1^{\,2} + 20u_1 - 36 = 0$$

ومنه : $u_1 = 2$ مقبول . أو $u_1 = 18$

مرفوض لأن (u_n) متزايدة تماما .

ومنه : لما $u_1 = 2$ فإن $u_3 = 20 - 2 = 18$

حساب الأساس q : $u_2 = u_1 q$

ومنه : $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$

ب/ $u_n = u_1 q^{n-1} = 2\times 3^{n-1}$

جـ/ $S_n = u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n$

$$= u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3^n - 1$$

تعيين n حيث : $S_n = 728$ أي $3^n - 1 = 728$

ومنه $3^n = 729$ ومنه : $n = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$

2) $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ/ حساب v_2 و v_3 : $v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 5$

و $v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{27}{2}$

ب/ لدينا : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3v_n + 2u_n}{6u_n} - \frac{2}{3} = \frac{3v_n + 2u_n - 4u_n}{6u_n}$$

$$= \frac{-2u_n + 3v_n}{6u_n} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}w_n$$

ومنه : (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ/ $w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ و $w_n = w_1 q^{n-1} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

عبارة v_n بدلالة n : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

ومنه : $v_n = \left(w_n + \frac{2}{3}\right)u_n$ ومنه $v_n = w_n u_n + \frac{2}{3}u_n$

ومنه $v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3}\times 3^{n-1}$

التمرين 12 :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$\ln u_3 - \ln u_2 = 1$ و $\ln u_3 + 2\ln\sqrt{u_6} = 11$

1) عيّن أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0 .

2) أكتب u_n بدلالة n ثم أدرس اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n).

3) أحسب المجموع : $u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n .

4) (v_n) متتالية عددية معرفة على N بـ:

$$v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$$

أ/ أثبت أن (v_n) حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول

ب/ أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع:

$$S_n = v_n = v_0 + v_1 + v_2 ...... + v_{n-1}$$

حل التمرين 12 :

1) تعين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0 :

لدينا : $\ln u_3 - \ln u_2 = 1$ و $\ln u_3 + 2\ln\sqrt{u_6} = 11$

ومنه: $\ln\left(\frac{u_3}{u_2}\right) = 1$ و $\ln u_3 + 2\times\frac{1}{2}\ln u_6 = 11$

ومنه: $\ln\left(\frac{u_3}{u_2}\right) = 1$ و $\ln(u_3 \cdot u_6) = 11$

ومنه: $\frac{u_3}{u_2} = e$ و $u_3 \times u_6 = e^{11}$

معناه: $q = e$ أساس المتتالية (u_n)

ولدينا : $u_3 \times u_6 = e^{11}$ أي : $u_0 \cdot q^3 \cdot u_0 \cdot q^6 = e^{11}$

ومنه: $u_0^2 \cdot e^9 = e^{11}$ أي: $u_0^2 = e^2$ ومنه : $u_0 = e$

((u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تمام)

2) عبارة u_n بدلالة n: $u_n = u_0 \cdot q^n = e \cdot e^n = e^{n+1}$

دراسة اتجاه تغيرات (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = e^{n+1} - e^n = e^n(e-1) > 0$$

ومنه: (u_n) متتالية متزايدة .

ولدينا: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{n+1} = +\infty$

ومنه: (u_n) متتالية متباعدة

3) $S = u_1 + u_2 + ...u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$

$$= e^2 \cdot \frac{e^n - 1}{e-1} = \frac{e^2}{e-1}(e^n - 1)$$

$$v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$$

4) أ/ إثبات أن (v_n) متتالية حسابية :

(v_n) متتالية حسابية إذا تحقق مايلي :

$v_{n+1} = v_n + r$ حيث (r عدد حقيقي ثابت)

$$v_{n+1} = 3\ln(u_{n+2}) - \ln u_{n+1}$$
$$= 3\ln(e \cdot u_{n+1}) - \ln(e \cdot u_n)$$
$$= 2\ln e + 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$$
$$= 3\ln e + 3\ln u_{n+1} - \ln e - \ln u_n$$
$$= 2\ln e + 3\ln u_{n+1} - \ln u_n = v_n + 2$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$

ب/ $S_n = v_0 + v_1 \; .. + v_{n-1} = \frac{n-1-0+1}{2}(v_0 + v_{n-1})$

حيث : $v_0 = 3\ln u_1 - \ln u_0 = 3\ln e^2 - \ln e$

$$= 6\ln e - \ln e = 5\ln e = 5$$

$$v_{n-1} = v_0 + (n-1)\cdot r = 5 + (n-1)2$$

ومنه : $S_n = \frac{n}{2}(5 + 5 + (n-1)2) = n(5 + (n-1)))$

التمرين 13 :

هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان في كل حالة من الحالات التالية:

1) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ و $v_n = 3 - \frac{5}{n}$

2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$

و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

حل التمرين 13 :

1) لاحظ أن المتتالية (u_n) ليست رتيبة لأن العدد $(-1)^n$ موجب إذا كان n زوجي وسالب إذا كان n فردي وعليه فالمتتاليتان (u_n) و (v_n) لايمكن أن تكونا متجاورتان حسب التعريف.

حذار: في هذا المثال $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 3$ ولكنهما متتاليتان غير متجاورتان.

2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

و $$u_{n+1} = \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}\right].$$

ومنه: $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2(n+1) + (2n+1) - 2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

(إذن: $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما)

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n + 2n(2n+1) - 2(n+1)(2n+1)}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{n + 4n^2 + 2n - 4n^2 - 6n - 2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-(3n+2)}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

(إذن: $v_{n+1} - v_n < 0$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماما)

ولدينا أيضا $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(u_n + \frac{1}{n}\right) - u_n = 0$

خلاصة: (u_n) متتالية متزايدة تماما و (v_n) متتالية متناقصة تماما و $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن: حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين 14 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ $u_0 = -1$ ؛ $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$

1) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$

2) برهن أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $x_n = u_n + av_n$ و $y_n = u_n + bv_n$ حيث a و b عددان حقيقيان متمايزان.

3) أوجد a و b حتى تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n) هندسيتان ثم عبر عن x_n و y_n ثم عبر بدلالة n عن x_n و y_n بدلالة n.

4) أوجد النهاية المشتركة للمتتاليتان (u_n) و (v_n).

حل التمرين 14 :

1) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$

- من أجل $n = 0$: $u_0 < v_0$ لأن $-1 < 2$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

• نفرض أن $u_n < v_n$ من أجل $n > 1$ ونبرهن أن: $u_{n+1} < v_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + 4v_n}{5}$

$= \frac{5u_n + 5v_n - 2u_n - 8v_n}{10}$

$= \frac{3u_n - 3v_n}{10} = \frac{3}{10}(u_n - v_n)$

لكن حسب فرضية التراجع $u_n < v_n$ أي $u_n - v_n < 0$

ومنه: $\frac{3}{10}(u_n - v_n) < 0$ أي $u_{n+1} - v_{n+1} < 0$ أي $u_{n+1} < v_{n+1}$

إذن: الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$

2) هل (u_n) و (v_n) متجاورتان؟

اتجاه التغير: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{-1}{2}(u_n - v_n)$

$= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n) > 0$

ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$ أي: المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n$

$= \frac{u_n + 4v_n - 5v_n}{5} = \frac{1}{5}(u_n - v_n) < 0$

إذن: $v_{n+1} - v_n < 0$ أي: المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

نهاية الفرق $u_n - v_n$

$\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - v_{n+1}) = \lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$

لكن: $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10}(u_n - v_n)$ حسب السؤال (1)

ومنه: $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10}(u_n - v_n) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 (u_{n-1} - v_{n-1})$

$= .... = \left(\frac{3}{10}\right)^n ((u_0) - v_0)$

ومنه: $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

خلاصة: (u_n) متتالية متزايدة تماما و (v_n) متتالية متناقصة تماما و $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

إذن: المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

إذن: هما متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ

3) من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $x_{n+1} = u_{n+1} + a v_{n+1}$

$x_{n+1} = u_{n+1} + a v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} + a\left(\frac{u_n + 4v_n}{5}\right)$

$= \frac{5u_n + 5v_n + 2a u_n + 8a v_n}{10}$

$= \frac{(2a+5)u_n + (8a+5)v_n}{10}$

$= \frac{2a+5}{10} \times \left(u_n + \frac{8a+5}{2a+5} v_n\right)$ حيث $2a+5 \neq 0$

إذن: تكون (x_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا تحقق أن

من أجل كل $x_{n+1} = \frac{2a+5}{10} x_n$ أي من أجل كل $n \in IN$:

$u_n + \frac{8a+5}{2a+5} v_n = u_n + a v_n$

إذن: يكفي ويلزم أن يكون: $a = \frac{8a+5}{2a+5}$ مع $2a+5 \neq 0$

أي: $2a^2 + 5a = 8a + 5$ أي: $2a^2 + 3a - 5 = 0$

وهي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول a.

$\Delta = 9 + 40 = 49$

$a_1 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$ أ $a_2 = \frac{3-7}{4} = -1$

لاحظ أن من أجل $a = -1$ فإن $2a+5 = 3 \neq 0$

إذن: يكفي أن نأخذ $a = -1$ في هذه الحالة: $x_{n+1} = \frac{3}{10} x_n$

أي (x_n) متتالية هندسية أساسها $3/10$

وحدها الأول $x_0 = u_0 - v_0 = -3$ إذن: $x_n = -3\left(\frac{3}{10}\right)^n$

من أجل $a = 5/2$ فإن $2a+5 = 10 \neq 0$

إذن: من أجل $a = 5/2$ فإن $x_{n+1} = 1 \times x_n$

أي المتتالية (x_n) هندسية أساسها 1 (ثابتة)

نتيجة: تكون المتتالية (y_n) المعرفة بـ: $y_{n+1}=u_n+b\,v_n$ هندسية حيث $b\neq -1$

إذا وفقط إذا كان $b=5/2$

وفي هذه الحالة المتتالية (y_n) ثابتة وكل حدودها تساوي:

$$y_0=u_0+\frac{5}{2}v_0=-1+5=4$$

ومنه: من أجل كل $n\in IN$ فإن $y_n=4$

4) لتكن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell$

لدينا من أجل كل $n\in IN$: $y_n=u_n+\frac{5}{2}v_n$

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n+\frac{5}{2}v_n\right)$

إذن: $4=\ell+\frac{5}{2}\ell$ أي: $4=\frac{7}{2}\ell$ ومنه: $\ell=8/7$ وهو المطلوب

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=8/7$

التمرين 15:

(بكالوريا 2008 علمي)

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$$

أ/ بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I $f(x)$ ينتمي إلى I

2) (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على N كما يأتي:

$$U_{n+1}=f(U_n)\quad,\quad U_0=\frac{3}{2}$$

أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، U_n ينتمي I

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n). أستنتج أنها متقاربة.

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

حل التمرين 15:

1) أ/ إثبات أن f متزايدة تماما على I:

f تقبل الاشتقاق على I حيث: $0<\frac{6}{(-x+4)^2}=$

$$f'(x)=\frac{1(-x+4)-(-1)(x+2)}{(-x+4)^2}$$

ومنه f متزايدة تماما على I

ب/ بإثبات أن: $f(x)\in I$

لدينا: $1\le x\le 2$

ومنه: $f(1)\le f(x)\le f(2)$ لأن f متزايدة تماما على I

إذن: $1\le f(x)\le 2$ أي: $f(x)\in I$

2/ أ/ برهان أن: $u_n\in I$

من أجل n = 0 ، $u_0=\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}\in I$ أي خاصية صحيحة من أجل n = 0.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي: $u_n\in I$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل n+1 أي: $u_{n+1}\in I$

لدينا: $u_n\in I$ ومنه $f(u_n)\in I$

حسب السؤال ب/ أي: $u_{n+1}\in I$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n\in I$ لكل عد طبيعي n.

ب/ اتجاه تغير المتتالية (U_n):

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n+2}{-U_n+4}-U_n$$

$$=\frac{U_n^2-4U_n+U_n+2}{-U_n+4}$$

$$=\frac{(U_n-1)(U_n-2)}{-U_n+4}$$

بما أن : $1 \le U_n \le 2$ فإن : $(U_n - 1)(U_n - 2) \le 0$

و $-U_n + 4 \ge 0$

$U_{n+1} - U_n \le 0$ ومنه (U_n) متناقصة .

الاستنتاج : لدينا (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي متقاربة.

3) لتكن $P(n)$ الخاصية : $U_n = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

من أجل n = 0 : $U_0 = 1 + \dfrac{1}{1+1} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

أي : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي : $U_n = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

نبرهن صحة $P(n+1)$ أي : $U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{U_n + 4} = \frac{1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}}{-1 - \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} + 4}$$

$$= \frac{3 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}}{3 - \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 2}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$$

نجد : $U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$ إذن $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن: $U_n = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

لكل n من N

ب/ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$

التمرين 16:

(بكالوريا 2008 علمي)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = \dfrac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n. $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 2$

1) أ/ أرسم في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على R بـ : $f(x) = \dfrac{2}{3}x + 2$

ب/ باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل و دون حساب الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.

ج/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_n \le 6$.

ب/ تحقق أن (u_n) متزايدة.

ج/ هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

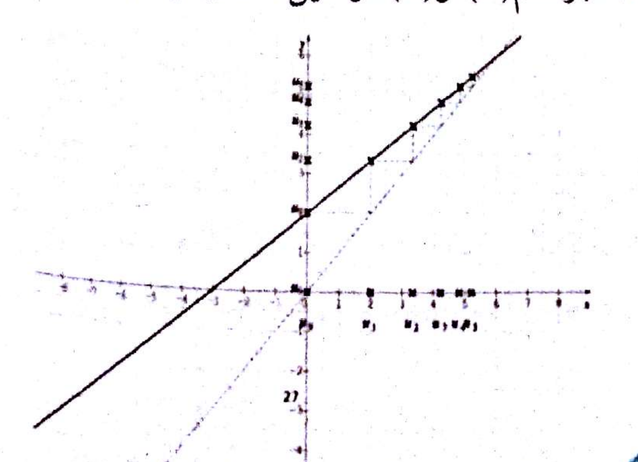
3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

أ/ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب/ أكتب عبارة U_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

حل التمرين 16 :

1) أ/ رسم (Δ) و (d) . و تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 :



ب/ التخمين :في الرسم نلاحظ أن : الحدود $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ و من جهة أخرى الحدود تتراكم حول العدد 6 و عليه :

فإن : المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة من العدد 6.

2) أ/ لتكن $P(n)$ الخاصية : $u_n \le 6$

من أجل n = 0 $u_0 \le 6$ صحيحة لأن $\frac{5}{2} \le 6$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي : $u_n \le 6$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \le 6$

لدينا : $u_n \le 6$ و $\frac{2}{3}u_n \le 4$ ومنه : $\frac{2}{3}u_n + 2 \le 6$

أي : $u_{n+1} \le 6$ إذن : $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع. فإن : $u_n \le 6$ لكل $n \in N$

ب) التحقق أن (u_n) متزايدة من أجل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n$$
$$= -\frac{1}{3}u_n + \frac{6}{3} = -\frac{1}{3}(u_n - 6)$$

لدينا $u_n - 6 \le 0$ ومنه $-\frac{1}{3}(u_n - 6) \ge 0$

أي : $u_{n+1} - u_n \ge 0$ إذن : (u_n) متزايدة.

ج/ (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) أ/ من أجل كل عدد طبيعي n.

$$V_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6$$
$$= \frac{2}{3}u_n - 4 = \frac{2}{3}(u_n - 6) = \frac{2}{3}V_n$$

أي (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $V_0 = -\frac{7}{2}$

ب) $U_n = V_n + 6 = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$

ولدينا: $\lim_{n \to +\infty} U_n = 6$ لأن $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$

التمرين 17 :

(بكالوريا 2009 علمي)

(u_n) متتالية معرفة على N كما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و } u_1 = 2 \text{ و } u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

المتتالية (v_n) معرفة على N كما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) أحسب v_0 و v_1 .

2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3) أ/ أحسب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$$

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$$

حل التمرين 17 :

1) $v_0 = u_{0+1} - u_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$

$v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1$

حيث : $u_2 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{4}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 1 = \frac{7}{3}$

ومنه : $v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$

2) (v_n) متتالية هندسية إذا تحقق مايلي : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_{n+1} = v_n \times q$ (q عدد حقيقي ثابت)

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

3) أ/ $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = v_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

ب/ $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

$$= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + ... + (u_n - u_{n-1})$$

$$= u_n - u_0$$

أي : $S_n = u_n - u_0$

ومنه : $u_n = S_n + u_0 = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$

التمرين 18 :

(بكالوريا 2009 علمي)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1) أ/ أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1 .

ب/ أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ/ أحسب S_n حيث :

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 728$.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ/ أحسب v_2 و v_3 .

ب/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ/ أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

حل التمرين 18 :

1) أ/ بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن $u_1 \times u_3 = (u_2)^2$.

ومنه : $(u_2)^3 = 216$ أي : $u_2 = 6$.

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

ومنه : $\begin{cases} u_1 + 2\times 6 + u_3 = 32 \\ u_1 \times 6 \times u_3 = 216 \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} u_1 + u_3 = 20 ....(1) \\ u_1 \times u_3 = 36 ....(2) \end{cases}$

من (1) : $u_3 = 20 - u_1$ نعوض u_3 في (2)

نجد : $u_1(20 - u_1) = 36$ ومنه $-u_1^2 + 20u_1 - 36 = 0$

ومنه : $u_1 = 2$ مقبول . أو $u_1 = 18$ مرفوض لأن (u_n) متزايدة تماما .

ومنه : لما $u_1 = 2$ فإن $u_3 = 20 - 2 = 18$

حساب الأساس q : $u_2 = u_1 q$

ومنه : $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$

ب/ $u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

جـ/ $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

$$= u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3^n - 1$$

تعيين n حيث : $S_n = 728$ ومنه $3^n - 1 = 728$

ومنه $3^n = 729$ ومنه : $n = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$

2) $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ/ حساب v_2 و v_3 : $v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 5$

و $v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{27}{2}$

ب/ لدينا : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{3v_n + 2u_n}{6u_n} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3v_n + 2u_n - 4u_n}{6u_n}$$

$$= \frac{-2u_n + 3v_n}{6u_n} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}w_n$$

ومنه : (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ/ $w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

و $w_n = w_1 q^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

عبارة v_n بدلالة n : لدينا: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

ومنه : $v_n = \left(w_n + \frac{2}{3}\right)u_n = w_n u_n + \frac{2}{3}u_n$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$$

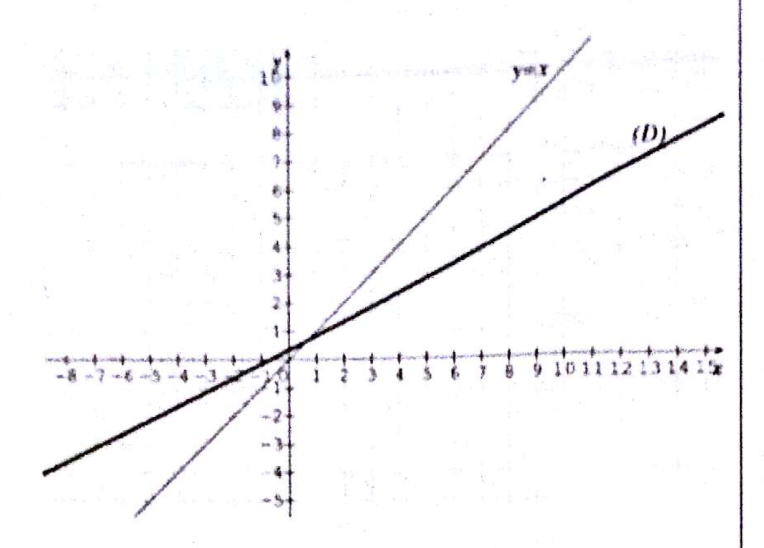
التمرين 19 :

(بكالوريا 2010 علمي)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب

$y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$



1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n .

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$.

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية : u_4, u_3, u_2, u_1, u_0 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم .

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) .

ج) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) أ) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول ب) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n .

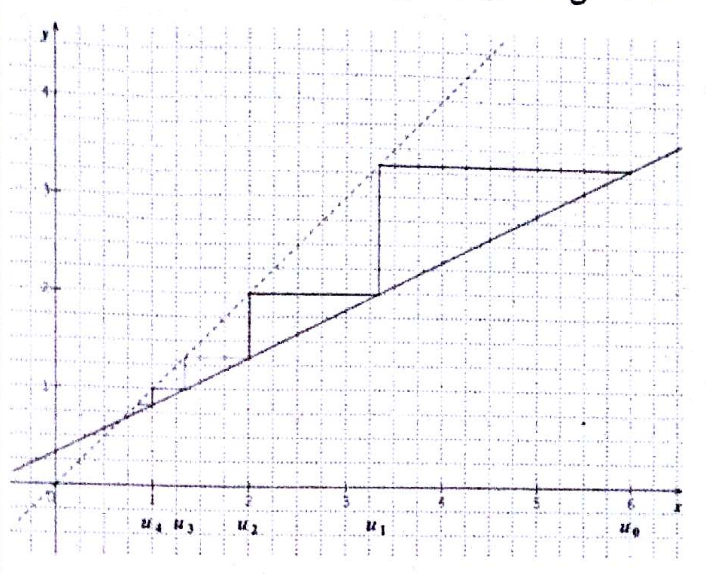
ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

و استنتج المجموع S'_n حيث $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

حل التمرين 19 :

1) أ) نقل المنحنى و تمثيل الحدود على محور الفواصل :



ب) فاصلة نقطة التقاطع (Δ) و (D) هي حلول المعادلة

$x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ أي $x=\frac{2}{3}$ و منه $y=\frac{2}{3}$ إذن :

$$(\Delta)\cap(D)=\left\{H\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$$

ج) التخمين هو أن المتتالية متناقصة تماما .

2) أ) الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0>\frac{2}{3}$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n>\frac{2}{3}$

و نثبت أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}>\frac{2}{3}$

لدينا $u_n>\frac{2}{3}$ تعني $\frac{1}{2}u_n>\frac{1}{3}$ و تعني أيضا

$\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}>\frac{2}{3}$ أي $u_{n+1}>\frac{2}{3}$ و منه من أجل كل n

طبيعي : $u_n>\frac{2}{3}$.

ب) لدينا من أجل كل n طبيعي :

$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$ و لكن $u_n>\frac{2}{3}$

أي $-\frac{1}{2}u_n<-\frac{1}{3}$ و منه $-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}<0$

أي $u_{n+1}-u_n<0$ مما يعني أن (u_n) متناقصة تماما .

3) أ) لدينا من أجل n طبيعي :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\frac{16}{3}$.

ب) عبارة الحد العام لـ : v_n هي : $v_n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا من أجل كل n طبيعي $u_n=v_n+\frac{2}{3}$

و منه $u_n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$

ج) $S'_n=u_0+u_1+.....+u_n$

$$=\left(v_0+\frac{2}{3}\right)+\left(v_1+\frac{2}{3}\right)+....+\left(v_n+\frac{2}{3}\right)$$

$$=S_n+\frac{2}{3}(n+1)$$

أي : $S'_n=-\frac{32}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)+\frac{2}{3}(n+1)$

التمرين 20 :

(بكالوريا 2011 علمي)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+1$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

1) المتتالية (v_n) :

أ. حسابية. ب. هندسية. ج. لا حسابية و لا هندسية.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي : أ. $+\infty$ / ب. $-\frac{1}{2}$ / ج. $-\infty$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + ... + e^{n\ln 3}\right]$$

أ. $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

ب. $S_n = \frac{1-3^n}{4}$

ج. $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

حل التمرين 20 :

1) المتتالية (V_n) هي : ب- هندسية لأن :

$$V_{n+1} = V_{n+1} + \frac{1}{2} = 3U_n + 1 + \frac{1}{2}$$

$$= 3U_n + \frac{3}{2} = 3\left(U_n + \frac{1}{2}\right) = 3V_n$$

2) نهاية المتتالية (U_n) هي : ج- $(+\infty)$ لأن :

V_n متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدّها الأول: $V_0 = -\frac{1}{2}$

أي : $V_n = V_0 q^n = -\frac{1}{2} \times 3^n$

وعليه $U_n = V_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$

وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}\right) = -\infty$

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، S_n هي :

ج- $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

لأن : $S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + .. + e^{n\ln 3}\right]$

$$= -\frac{1}{2}\left(3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^n\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right) = \frac{1-3^{n+1}}{4}$$

التمرين 21 :

(بكالوريا 2011 علمي)

α عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على N بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

1) أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب) أكتب بدلالة n و α، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α عبارة u_n.

ج) عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع $\alpha = \frac{3}{2}$.- أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

حل التمرين 21 :

1) أ) إثبات أن المتتالية (V_n) هندسية : (V_n) متتالية هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي q حيث : $V_{n+1} = q \times V_n$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{\alpha-1} = \alpha U_n + 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

$$= \alpha U_n + \frac{\alpha - 1 + 1}{\alpha - 1}$$

$$V_{n+1} = \alpha U_n + \frac{1}{x-1} = x\left(U_n + \frac{1}{\alpha-1}\right) = \alpha \times V_n$$

و عليه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \alpha$.

ب) كتابة عبارة V_n بدلالة x و n :

لدينا : $V_0 = U_0 + \frac{1}{\alpha-1} = 6 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{6\alpha-5}{\alpha-1}$

و عليه : $V_n = V_0 \times q^n = \left(\frac{6x-5}{x-1}\right).\alpha^n$

استنتاج U_n بدلالة n و α :

بما أن : $V_n = U_n + \frac{1}{\alpha-1}$ فإن : $U_n = V_n - \frac{1}{\alpha-1}$

و عليه : $U_n = \frac{6\alpha-5}{\alpha-1}\alpha^n - \frac{1}{\alpha-1}$

ج) تعيين قيم α حتى تكون من أجلها (U_n) متقاربة :

حتى تكون (U_n) متقاربة يجب أن تكون : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$

و عليه قيم α الممكنة هي $x \in]0,1[$.

2) بوضع $\alpha = \frac{3}{2}$. حساب المجموعين S_n و T_n :

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots\dots + V_n = V_0 \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

لدينا : $V_0 = \frac{6\alpha-5}{\alpha-1} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

و عليه : $S_n = 8\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right] = 16\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]$

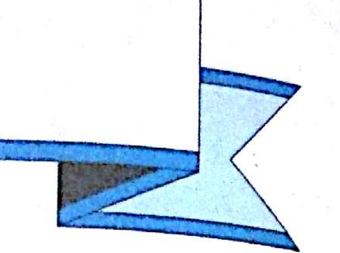
$$T_n = U_0 + U_1 + \dots\dots\dots\dots + U_n$$

$$= (V_0 - 2) + (V_1 - 2) + \dots\dots\dots + (V_n - 2)$$

ومن جهة :

$$= S_n - 2(n+1) = 16\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 16 - 2n - 2$$

$$= 16\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 2n - 18$$



الدوال الأصلية والحساب التكاملي

الدوال الأصلية :

1) تعريف دالة أصلية لدالة:

f دالة عددية معرفة على مجال I .نسمى دالة أصلية للدالة f كل دالة F قابلة للاشتقاق على I بحيث من أجل كل $x \in I$ فإن: $F'(x)=f(x)$.

مثال: • f معرفة على R بـ:

$$f(x)=2x \quad F(x)=x^2+1$$

قابلة للاشتقاق على R حيث من أجل كل $x \in R$:

ومنه: $F'(x)=x^2+1=2x=f(x)$

F دالة أصلية للدالة f على R .

2) مجموعة الدوال الأصلية :

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I

وتسمى كل الدوال من الشكل : $x \mapsto F(x)+c$ بمجموع الدوال الأصلية للدالة f على مجال I .(c عدد حقيقي ثابت)

مثال: • f معرفة على R بـ: $f(x)=2x$

و $F_1(x)=x^2+1$ ، F_1 دالة أصلية للدالة f على R .

فإن مجموع الدوال الأصلية للدالة f على R هي جميع الدوال من الشكل $F(x)=x^2+1+c$

(c عدد حقيقي ثابت)

3) الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير: إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I و $G(x)=F(x)+c$ هي مجموع الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

فإن الدالة F_1 التي تأخذ قيمة y_0 من أجل القيمة x_0 تحقق: $G(x_0)=y_0$ أي: $y_0=F(x_0)+c$

أي $c=y_0-F(x_0)$ ومنه: $F_1(x)=F(x)+y_0-F(x_0)$

4) الدوال الأصلية لدوال مألوفة :

المجال I	دوالها الأصلية F	الدالة f
R	$a.x+c$	(a عدد حقيقي ثابت)
R	$\frac{1}{n+1}.x^{n+1}+c$	$(n \in N^*)$ x^n
$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$	$\frac{-1}{(n-1).x^{n-1}}+c$	$(n \in N^*-\{1\})$ $\frac{1}{x^n}$
R	$-\cos(x)+c$	$\sin(x)$
R	$\sin(x)+c$	$\cos(x)$
$]0;+\infty[$	$\sqrt{x}+c$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$]0;+\infty[$	$\ln x+c$	$\frac{1}{x}$
R	e^x+c	e^x

5) العمليات على الدوال الأصلية :

• **المجموع** : إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I و G دالة أصلية للدالة g على المجال I فإن : الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I .

• **جداء عدد حقيقي بدالة :**

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I

و G دالة أصلية للدالة f على المجال I و k

(عدد حقيقي ثابت)

فإن : الدالة $k.F$ دالة أصلية للدالة $k.f$ على المجال I .

• **الدالة الأصلية للدالة** $(u'.u^n)$: حيث $n \geq 1$.

الدالة الأصلية للدالة $u'.u^n$ هي الدالة : $\frac{1}{n+1}.u^{n+1}$

- الدالة الأصلية للدالة $\left(\frac{u'}{u^n}\right)$: حيث $n \geq 2$.

الدالة الأصلية للدالة $\frac{u'}{u^n}$ هي الدالة : $\frac{-1}{(n-1).u^{n-1}}$

- الدالة الأصلية للدالة $\left(\frac{u'}{2\sqrt{u}}\right)$:

الدالة الأصلية للدالة $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ هي الدالة : $\sqrt{u}$

- الدالة الأصلية للدالة $\left(\frac{u'}{u}\right)$:

الدالة الأصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ هي الدالة : $\ln|u|$

- الدالة الأصلية للدالة $u'.e^u$:

الدالة الأصلية للدالة $u'.e^u$ هي الدالة : e^u

- الدالة الأصلية للدالة $\sin(ax+b)$: حيث $a \neq 0$

الدالة الأصلية للدالة $\sin(ax+b)$ هي الدالة :

$\frac{-1}{a}.\cos(ax+b)$

- الدالة الأصلية للدالة $\cos(ax+b)$: حيث $a \neq 0$

الدالة الأصلية للدالة $\cos(ax+b)$ هي الدالة :

$\frac{1}{a}.\sin(ax+b)$

الحساب التكاملي وحساب المساحات

1) تعريف :

f دالة مستمرة على المجال I و F دالتها الأصلية على المجال I

a و b عددان حقيقيان من المجال I .يسمى العدد الحقيقي

L حيث: $L = F(b) - F(a)$ بالتكامل من a إلى b للدالة f

ونرمز له بـ : $\int_a^b f(x)dx$ ونقرأ تكامل من a إلى b للدالة f تفاضل x .

ونكتب : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

مثال : $\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}.x^3\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3}.2^3\right) - \left(\frac{1}{3}.1^3\right) = \frac{7}{3}$

خواص :

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$ ، 2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ حيث k عدد حقيقي ثابت .

4) علاقة شال : من أجل كل a و b و c من المجال I

فإن : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5) المقارنة : f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a;b]$

- إذا كانت $f(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in [a;b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

- إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ من أجل كل $x \in [a;b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

2) حساب المساحات :

1) S مساحة حيز من المستوى محصور بين (Cf) و محور الفواصل والمستقيمات التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$.

- في حالة (Cf) يقع فوق محور الفواصل لما $x \in [a;b]$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad (\text{u.s})$$

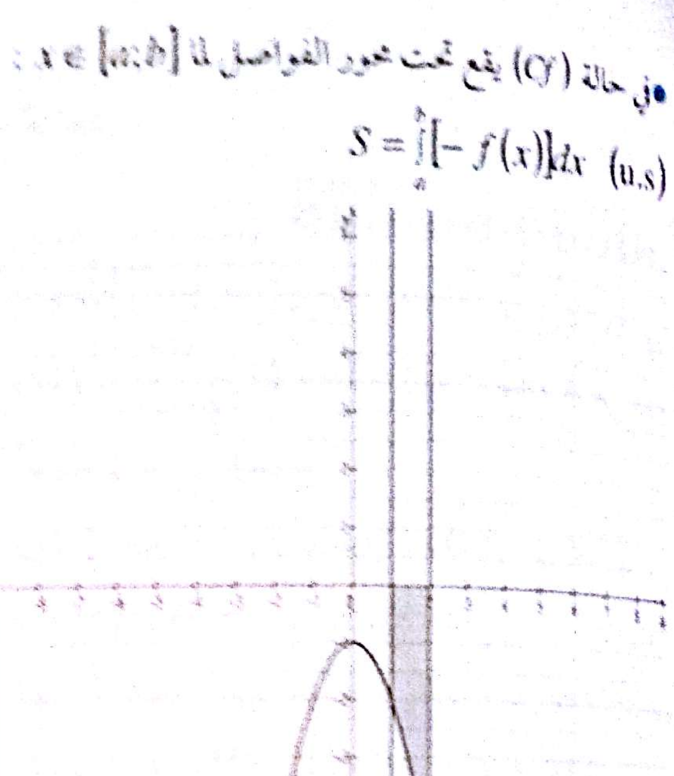
(Cf)

x=a

x=b

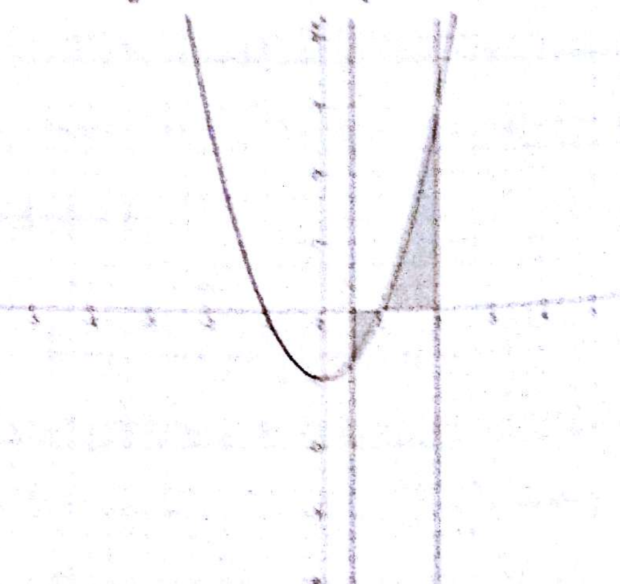
- في حالة (C_f) يقع تحت محور الفواصل لما $x \in [a;b]$:

$$S = \int_a^b [-f(x)]dx \ (u.s)$$



- في حالة (C_f) يقع تحت محور الفواصل لما $x \in [a;c]$ و (C_f) يقع فوق محور الفواصل لما $x \in [c;b]$:

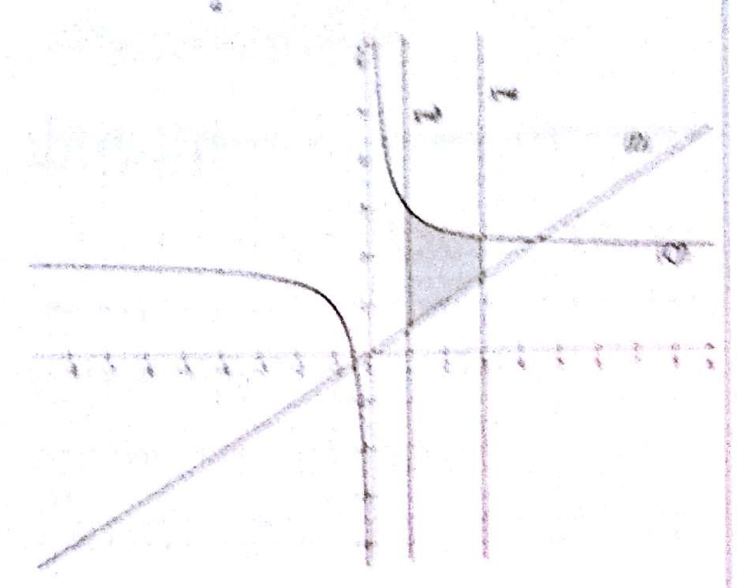
$$S = \int_a^c [-f(x)]dx + \int_c^b [f(x)]dx \ (us)$$



2) S: مساحة حيز من المستوي محصور بين (C_f) و المستقيم المائل (Δ) الذي معادلته $y = \alpha x + \beta$ والمستقيمات التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$.

- في حالة (C_f) يقع فوق (Δ) لما $x \in [a;b]$:

$$S = \int_a^b [f(x) - (\alpha x + \beta)]dx \ (us)$$



- في حالة (C_f) يقع تحت (Δ) لما $x \in [a;b]$:

$$S = \int_a^b [(\alpha x + \beta) - f(x)]dx \ (us)$$

3) القيمة المتوسطة لدالة على مجال $[a;b]$:

إذا كانت دالة f مستمرة على المجال $[a;b]$ فإنه يوجد عدد حقيقي $C \in [a;b]$.

حيث : $f(C) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

وتسمى القيمة $f(C)$ بالقيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$.

4) الدالة الأصلية لدالة مستمرة على المجال I والتي تنعدم من أجل قيمة من I :

f دالة مستمرة على المجال I.

الدالة الأصلية لدالة مستمرة على المجال I والتي تنعدم من أجل قيمة x_0 من I هي الدالة F حيث: $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$

تمارين

التمرين 01:

بين أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D ثم عين دالة أصلية أخرى للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=x^2-10x-9$

و $F(x)=\frac{1}{3}x^3-5x^2-9x-1$

و $D=R$

2) $f(x)=2x-1+\frac{2x}{x^2-1}$

و $F(x)=x^2-x+\ln(x^2-1)$ و $D=]1;+\infty[$

حل التمرين 01 :

1) الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال IR ودالتها المشتقة هي: $F'(x)=x^2-10x-9=f(x)$ ومنه F هي دالة أصلية لـ f على IR

وبالتالي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على IR هي :

$x\mapsto F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت

وللحصول على دالة أصلية أخرى للدالة f يكفي تغيير العدد الحقيقي الثابت في عبارة :

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-5x^2-9x-1$$

فنحصل على دالة أصلية أخرى :

$$G(x)=\frac{1}{3}x^3-5x^2-9x+1$$

2) $F(x)=x^2-x+\ln(x^2-1)$

مجموعة تعريف الدالة F : F معرفة إذا كان $x^2-1>0$

وعليه فإن $D_F=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي: $F'(x)=2x-1+\frac{2x}{x^2-1}=f(x)$ ومنه F هي دالة أصلية لـ f على $]1;+\infty[$.

وبالتالي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على IR هي :

$x\mapsto F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت وللحصول على دالة أصلية أخرى للدالة f يكفي تغيير العدد الحقيقي الثابت في عبارة $F(x)=x^2-x+\ln(x^2-1)$

فنحصل على دالة أصلية أخرى :

$$G(x)=x^2-x+\ln(x^2-1)+5$$

التمرين 02:

1) f دالة عددية معرفة على $R-\{-1;3\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{2x-7}{x^2-2x-3}$$

عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل x من $R-\{-1;3\}$:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}$$

ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]3;+\infty[$.

2) f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x-1}$

عين الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=a+\frac{b\,e^x}{e^x-1}$ ثم استنتج دالة أصلية f على المجال $]0;+\infty[$

حل التمرين 02 :

1) من أجل $x\in D_f$:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}$$
$$=\frac{2x-2+\alpha(x-3)+\beta(x+1)}{x^2-2x-3}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta+2)x+(\beta-3\alpha-2)}{x^2-2x-3}$$

بالمطابقة : $(\alpha+\beta+2=2\ ;\ \beta-3\alpha-2=-7)$

ومنه : $\begin{cases}\alpha+\beta+2=2\\ \beta-3\alpha-2=-7\end{cases}$

ومنه : $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \beta-3\alpha=-5\end{cases}$

ومنه : $\begin{cases}\alpha=-\beta\\ 4\beta=-5\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}\alpha=\frac{5}{4}\\ \beta=\frac{-5}{4}\end{cases}$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]3;+\infty[$:

من أجل $x\in D_f$:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{5}{4(x+1)}-\frac{5}{4(x-3)}$$

نعلم أن الدالة الأصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ هي الدالة : $\ln|u|$

من أجل كل $x\in]3;+\infty[$: $0<x-3$ و $0<x+1$

و $x^2-2x-3>0$

لدينا الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{2x-2}{x^2-2x-3}$ على المجال $]3;+\infty[$ هي $x\mapsto\ln(x^2-2x-3)$

لدينا الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{5}{4(x+1)}$ على المجال $]3;+\infty[$ هي $x\mapsto\frac{5}{4}\ln(x+1)$

لدينا الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{5}{4(x-3)}$ على المجال $]3;+\infty[$ هي $x\mapsto\frac{5}{4}\ln(x-3)$

ومنه : من أجل كل $x\in]3;+\infty[$: فالدالة :

$$x\to\ln(x^2-2x-3)+\frac{5}{4}\ln(x+1)+\frac{5}{4}\ln(x-3)$$

دالة أصلية للدالة f في المجال $]3;+\infty[$ ولدينا:

$F(x)=\ln(x^2-2x-3)+\frac{5}{4}\ln\frac{x+1}{x-3}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]3;+\infty[$.

2) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$a+\frac{be^x}{e^x-1}=\frac{ae^x-a+b^e}{e^x-1}=\frac{(a+b)e^x-a}{e^x-1}$$

بالمطابقة مع: $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x-1}$. نحصل على $\begin{cases}a+b=1\\ -a=-2\end{cases}$

أي $\begin{cases}b=1\\ a=2\end{cases}$ ومنه فإن: $f(x)=2-\frac{e^x}{e^x-1}$

لدينا:

الدالة $x\mapsto 2x$ أصلية للدالة $x\mapsto 2$ على المجال $]0;+\infty[$

والدالة $x\mapsto\ln(e^x-1)$ أصلية للدالة $x\mapsto\frac{e^x}{e^x-1}$ على المجال $]0;+\infty[$.

منه: $F(x)=2x-\ln(e^x-1)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

التمرين 03:

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال f من الشكل $u\times u^n$ عين مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية على المجال I:

1) $f(x)=(x-1)^4$: $I=IR$

2) $f(x)=3(3x+4)^5$: $I=IR$

3) $f(x)=e^x(e^x-1)^2$: $I=IR$

4) $f(x)=x^2(x^3+1)^4$: $I=IR$

5) $f(x)=\frac{1}{x}\left[\ln(x)\right]^2$: $I=]0;+\infty[$

6) $f(x)=2\cos x\sin^2 x$: $I=IR$

حل التمرين 03 :

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن : الدالة الأصلية للدالة $u'.u^n$ هي الدالة :

$$\frac{1}{n+1}.u^{n+1}$$ حيث $(n\neq -1)$

1) نضع: $u(x)=x-1$ منه: $u'(x)=1$

إذن: $f(x)=(x-1)^4=u'(x)\times\left[u(x)\right]^4$

ومنه: الدالة $x\mapsto\frac{1}{4+1}\left[u(x)\right]^4$ هي دالة أصلية

لـ $x\mapsto(x-1)^4$ أي: $F(x)=\frac{1}{5}(x-1)^5+c$ هي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

2) نضع: $u(x)=3x+4$ إذن: $u'(x)=3$

منه: $f(x)=3(3x+4)^5=u'(x)\left[u(x)\right]^5$

إذن: الدالة $x\mapsto\frac{1}{6}\left[u(x)\right]^6$ هي دالة أصلية

لـ $x\mapsto u'(x)\left[u(x)\right]^5$ أي: $F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^6c$ هي مجموعة الدوال أصلية للدالة f

3) نضع: $u(x)=e^x-1$ إذن: $u'(x)=e^x$

منه: $f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^2=u'(x)\left[u(x)\right]^2$

إذن:الدالة $x\mapsto\frac{1}{3}\left[u(x)\right]^3$ هي دالة أصلية

لـ $x\mapsto u'(x)\left[u(x)\right]^2$ أي: $F(x)=\frac{1}{3}\left(e^x-1\right)^3+c$ هي مجموعة الدوال أصلية للدالة f

4) نضع: $u(x)=x^3+1$ منه: $u'(x)=3x^2$ منه:

$$f(x)=x^2(x^3+1)^4=\frac{1}{3}u'(x)\left[u(x)\right]^4$$

إذن: الدالة $x\mapsto\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\left[u(x)\right]^5$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto\frac{1}{3}u'(x)\left[u(x)\right]^4$ أي: $F(x)=\frac{1}{15}\left(x^3+1\right)^5+c$ هي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

5) نضع: $u(x)=\ln x$ إذن: $u'(x)=\frac{1}{x}$

منه: $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x)^2=u'(x)\left[u(x)\right]^2$

إذن: $x\mapsto\frac{1}{3}\left[u(x)\right]^3$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto u'(x)\left[u(x)\right]^2$

أي: $F(x)=\frac{1}{3}(\ln x)^3+c$ هي مجموعة الدوال أصلية للدالة f .

6) نضع: $u(x)=\sin x$ إذن: $u'(x)=\cos x$

إذن: $f(x)=2\cos x\sin^2 x=2u'(x)\left[u(x)\right]^2$

منه: الدالة $x\mapsto 2\times\frac{1}{3}\left[u(x)\right]^3$ هي دالة أصلية

لـ $x\mapsto 2u'(x)\left[u(x)\right]^2$ أي: $F(x)=\frac{2}{3}\sin^3 x+c$ هي مجموعة الدوال أصلية للدالة f .

التمرين 04:

لتكن f الدالة المعرفة على $]0;1[$ بـ $f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل x من $]0;1[$:

$$f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-1)^2}$$

2) إستنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0;1[$ تحقق

$$F(\frac{1}{2})=6$$

حل التمرين 04 :

1) من أجل كل x من $]0;1[$ لدينا: $\frac{a}{x2}+\frac{b}{(x-1)2}$

$$=\frac{a\left(x^2-2x+1\right)+bx^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2-2ax+a}{x^2(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع $f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ نحصل على $\left.\begin{matrix} a+b=0\\ -2a=2\\ a=-1\end{matrix}\right\}$

أي $\left.\begin{matrix} b=-a\\ a=-1\\ a=-1\end{matrix}\right\}$ أي $\left.\begin{matrix} b=1\\ a=-1\end{matrix}\right\}$

ومنه من أجل كل x من $]0;1[$: $f(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$

2) لدينا: $f(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=-\left(x^{-2}\right)+\left(x-1\right)^{-2}$

نعلم أن الدالة الأصلية للدالة $u'.u^n$ هي الدالة: $\frac{1}{n+1}.u^{n+1}$

الدالة $x\mapsto \frac{1}{-2+1}x^{-2+1}=-\frac{1}{x}$ أصلية للدالة $x\mapsto x^{-2}$

الدالة $x\mapsto \frac{1}{-2+1}(x-1)^{-2+1}=\frac{-1}{x-1}$ أصلية للدالة

$$x\mapsto (x-1)^{-2}$$

منه الدالة: $x\mapsto -\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x-1}$ هي دالة أصلية

ل $x\mapsto -x^{-2}+(x-1)^{-2}$

أي: $F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$ حيث c عدد حقيقي ثابت يمكن

البحث عنه بحساب $F(\frac{1}{2})$ كما يلي:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1/2}-\frac{1}{\frac{1}{2}-1}+c=6 \Leftrightarrow c=6-2-2 \Leftrightarrow c=2$$

$F(\frac{1}{2})=6$ نتيجة: $F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+2$

التمرين 05:

f دالة معرفة على $]1;+\infty[$ ب $f(x)=\frac{x^3+3x}{\left(x^2-1\right)^3}$

1) عين العددين الحقيقين a و b حيث:

$$f(x)=\frac{a}{(x-1)^3}+\frac{b}{(x+1)^3}$$

2) استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1;+\infty[$

3) استنتج دالة أصلية F للدالة f تحقق: $F(0)=1$

حل التمرين 05 :

1) من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $\frac{a}{(x-1)^3}+\frac{b}{(x+1)^3}$

$$=\frac{a(x+1)^3+b(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

$$=\frac{a\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+b(x^3-3x^2+3x-1)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

$$=\frac{(a+b)x^3+3(a-b)x^2+3(a+b)xa-b}{\left(x^2-1\right)^3}$$

بالمطابقة مع $f(x)=\frac{x^3+3x}{\left(x^2-1\right)^3}$ نحصل على $\left.\begin{matrix} a+b=1\\ a-b=0\end{matrix}\right\}$

أي $\left.\begin{matrix} a=1/2\\ b=1/2\end{matrix}\right\}$

2) الدالة $x\mapsto \frac{1}{(x+1)^3}$ من الشكل $x\mapsto (x+1)^{-3}$

إذن: الدالة $x\mapsto \frac{1}{-3+1}(x+1)^{-3+1}=\frac{-1}{2(x+1)^2}$

هي دالة أصلية ل $x\mapsto \frac{1}{(x+1)^3}$

الدالة $x\mapsto \frac{1}{(x-1)^3}$ من الشكل $x\mapsto (x-1)^{-3}$

إذن: الدالة $x\mapsto \frac{1}{-3+1}(x-1)^{-3+1}=\frac{-1}{2(x-1)^2}$ هي دالة

أصلية ل $x\mapsto \frac{1}{(x-1)^3}$

منه: الدالة $x\mapsto \left(\frac{-1}{2(x-1)^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2(x+1)^2}\right)+c$

هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \frac{1}{2(x+1)^3}+\frac{1}{2(x-1)^3}$

أي: $F(x)=\dfrac{-1}{4(x-1)^2}-\dfrac{1}{4(x+1)^2}+c$ هي الدالة الأصلية لـ f

3) استنتج دالة أصلية F للدالة f تحقق: $F(0)=1$

$$F(0)=1 \Leftrightarrow \frac{-1}{4}-\frac{1}{4}+c=0 \quad \Leftrightarrow c=1/2$$

ومنه: $F(x)=\dfrac{-1}{4(x-1)^2}-\dfrac{1}{4(x+1)^2}+\dfrac{1}{2}$ هي الدالة الأصلية المطلوبة .

التمرين 06:

f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$

1) عين الدالة المشتقة للدالة g المعرفة على $]-a;+\infty[$ بـ $g(x)=(x+a)\ln|x+a|-x$

حيث (a عدد حقيقي ثابت).

2) استنتج دالة أصلية للدالة $h: x\mapsto \ln|x+a|$ على $]-a;+\infty[$

3) استنتج مجموع الدوال الأصلية للدالة f على $]2;+\infty[$.

حل التمرين 06:

1) $$g'(x)=\ln|x+a|+(x+a)\times\frac{1}{x+a}-1$$
$$=\ln|x+1|+1-1 \;=\ln|x+a|$$

2) لدينا: $g'(x)=\ln|x+a|$ أي $g'(x)=h(x)$

ومنه: g هي دالة أصلية لـ h على $]-a;+\infty[$

3) $$f(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=\ln|x-2|-\ln|x+2|$$

حسب السؤال (1) فإن:

الدالة $x\mapsto (x-2)\ln|x-2|-x$ أصلية لـ $x\mapsto \ln|x-2|$

الدالة $x\mapsto (x+2)\ln|x+2|-x$ أصلية لـ $x\mapsto \ln|x+2|$

إذن: الدالة:

$$x\mapsto (x-2)\ln|x-2|-x-[(x+2)\ln|x+2|-x]$$

أصلية للدالة: $x\mapsto \ln|x-2|-\ln|x+2|$

أي الدالة $x\mapsto (x-2)\ln|x-2|-(x+2)\ln|x+2|+c$ أصلية للدالة f حيث (c عدد حقيقي ثابت).

التمرين 07:

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال $x\mapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^n}$

عين الدوال الأصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{5}{(x-2)^7}$: $I=]2;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^3}$: $I=]-1;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{2}{(2x-1)^3}$: $I=]1/2;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$: $I=]1;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{ex}{(1+ex)^2}$: $I=IR$

6) $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$: $I=IR$

7) $f(x)=\dfrac{6x^2}{(x^3+1)^4}$: $I=]-1;+\infty[$

8) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$: $I=]-\pi/2;\pi/2[$

9) $f(x)=\dfrac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2}$: $I=]0;+\infty[$

10) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x+2)^2}$: $I=[1;+\infty[$

حل التمرين 07:

1) نضع: $u(x)=x-2$ منه: $u'(x)=1$

إذن: $f(x)=\dfrac{5}{(x-2)^7}=5(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^7})$

منه: الدالة $x\mapsto 5(\dfrac{-1}{(7-1)[u(x)]^{7-1}}$ دالة أصلية لـ $x\mapsto 5\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^7}$

أي: $F(x)=\frac{-5}{6(x-2)^6}+c$ هي دالة أصلية للدالة f

2) نضع: $u(x)=x+1$ منه: $u'(x)=1$

إذن: $f(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}=-2\left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3}\right)$

إذن: الدالة $x\mapsto -2(\frac{-1}{2(u(x))^2})$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto -2(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3})$ منه: $F(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f .

3) نضع: $u(x)=2x-1$ إذن: $u'(x)=2$

منه: $f(x)=\frac{2}{(2x-1)^3}=\frac{u'(x)}{[u(x)]^3}$

الدالة $x\mapsto \frac{-1}{2(u(x))^2}$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^3}$

إذن: $F(x)=\frac{-1}{2(2x+1)^2}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4) نضع: $u(x)=\ln x$ إذن: $u'(x)=1/x$

منه: $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}=\frac{1/x}{(\ln x)^2}=\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x\mapsto \frac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن: $F(x)=\frac{-1}{\ln x}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5) نضع: $u(x)=1+e^x$ إذن: $u'(x)=e^x$

منه: $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

6) نضع: $u(x)=x^2-x+1$ إذن: $u'(x)=2x-1$

منه: $f(x)=\frac{2x-1}{(x^2-x+1)2}=\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x\mapsto \frac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن: $F(x)=\frac{-1}{x^2-x+1}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

7) نضع: $u(x)=x^3+1$ منه: $u'(x)=3x^2$

إذن: $f(x)=\frac{6x^2}{(x^3+1)^4}=2(\frac{u'(x)}{[u(x)]^4})$

الدالة: $x\mapsto 2(\frac{-1}{3[u(x)]^3})$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto 2(\frac{u'(x)}{[u(x)]^4})$

إذن: $F(x)=\frac{-2}{3(x^3+1)}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

8) نضع $u(x)=\cos x$ إذن: $u'(x)=-\sin x$

منه: $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}=-(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3})$

الدالة $x\mapsto -(\frac{-1}{2(u(x))^2})$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3})$

إذن: $F(x)=\frac{1}{2(u(x))^2}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

9) نضع: $u(x)=e^x+2x$ منه: $u'(x)=e^x+2$

منه: $f(x)=\frac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2}=-(\frac{u'(x)}{[u(x)]^2})$

الدالة: $x\mapsto -\left(\frac{-1}{u(x)}\right)$ أصلية لـ $x\mapsto -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^2})$

ومنه: $F(x)=\frac{1}{e^x+2x}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

10) نضع: $u(x)=\ln x+2$ منه: $u'(x)=1/x$

منه: $f(x)=\frac{1}{x(\ln x+2)^2}=\frac{1/x}{(\ln x+2)^2}=\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x\mapsto \frac{-1}{u(x)}$ أصلية للدالة $x\mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

ومنه: $F(x)=\frac{-1}{\ln x+2}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين 08:

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال I :

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$: $I=]1;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$: $I=]2;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}$: $I=]3;+\infty[$

4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}}+3$: $I=]-\infty;2[$

5) $f(x)=\frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}$: $I=]0;+\infty[$

6) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x-3}}$: $I=]3;+\infty[$

7) $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$: $I=]0;\pi[$

8) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+3}}$: $I=IR$

9) $f(x)=\frac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3-x^2}}$: $I=]0;+\infty[$

حل التمرين 08 :

1) نضع: $u(x)=x-1$ إذن: $u'(x)=1$

منه: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ إذن: $F(x)=2\sqrt{x-1}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2) نضع $u(x)=x^2-4$ إذن: $u'(x)=2x$

منه: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن: $F(x)=2\sqrt{x^2-4}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f .

3) نضع: $u(x)=x^2-x-6$ إذن: $u'(x)=2x-1$

منه: $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن: $F(x)=2\sqrt{x^2-x-6}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f .

4) نضع: $u(x)=2-x$ إذن: $u'(x)=-1$

منه: $f(x)=\frac{1}{2-x}+3=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}+3$

إذن: $F(x)=-2-\sqrt{2-x}+3x+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f .

5) نضع: $u(x)=e^x-1$ منه: $u'(x)=e^x$

منه: $f(x)=\frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}=2\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن: $F(x)=2\left(2\sqrt{e^x-1}\right)+c$

أي: $F(x)=4\sqrt{e^x-1}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

6) نضع: $u(x)=x-3$ منه: $u'(x)=1$

إذن: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x-3}}=\frac{2}{\sqrt{x}}-2\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

منه: $F(x)=2(2\sqrt{x})-2\left(2\sqrt{u(x)}\right)+c$

أي: $F(x)=4\sqrt{x}-4\sqrt{x-3}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f .

7) نضع: $u(x)=\sin x$ منه: $u'(x)=\cos x$

إذن: $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

منه: $F(x)=2\sqrt{\sin x}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

8) نضع: $u(x)=2\cos x+3$ منه: $u'(x)=-2\sin x$

أي: $\sin x=\frac{-1}{2}u'(x)$

إذن: $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+3}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$

منه: $F(x)=-\frac{1}{2}(2\sqrt{2\cos x+3}+c$

أي: $F(x)=-\sqrt{2\cos x+3}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

9) نضع $u(x)=x^3+x^2$ إذن: $u'(x)=3x^2+2x$

إذن: $f(x)=\frac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^2}}=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

التمرين 09:

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=(2x^2-7x+5)e^x$

1) احسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$

2) تحقق أن من أجل كل x من IR :

$f(x)=4e^x+2f'(x)-f''(x)$

3) استنتج دالة أصلية للدالة f على IR

حل التمرين 09 :

1) $f'(x)=(4x-7)e^x+(ex^2-7x+5)e^x$

$=(2x^2-7x+5+4x-7)e^x$

$=(2x^2-3x-2)e^x$

$f''(x)=(4x-3)e^x+(2ex^2-3x-2)e^x$

$=(2x^2+x-5)e^x$

2) من أجل كل x من IR فإن:

$4e^x+2f'(x)-f''(x)=(4+4x^2-6x-4-2x^2-x+5)e^x$

$=(2x^2-7x+5)e^x \quad =f(x)$

3) حسب السؤال فإن: $f(x)=4e^x+2f'(x)-f''(x)$

الدالة $x\mapsto 4e^x$ أصلية لـ $x\mapsto 4e^x$

الدالة $x\mapsto f(x)$ أصلية لـ $x\mapsto f'(x)$

الدالة $x\mapsto f'(x)$ أصلية لـ $x\mapsto f''(x)$

منه الدالة $x\mapsto 4e^x+2f(x)-f'(x)+c$ أصلية لـ f

أي الدالة :

$x\mapsto 4e^x+2(2x^2-7x+5)e^x-(2x^2-3x-2)e^x+c$

أصلية للدالة f أي الدالة :

$x\mapsto(4+4x^2-14x+10-2x^2+3x+2)e^x+c$

أصلية للدالة f أي الدالة $x\mapsto(2x^2-11x+16)e^x+c$

أصلية للدالة f .

التمرين 10:

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=\cos^3 x$

تحقق أن: $f(x)=\cos x-\cos x\sin^2 x$ ثم إستنتج دالة أصلية للدالة f على IR .

حل التمرين 10 :

من أجل كل x من IR :

$\cos x-\cos x\sin^2 x=\cos x(1-\sin^2 x)$

$=\cos x(\cos^2 x)$

$=\cos^3 x=f(x)$

الدالة $x\mapsto \sin x$ أصلية لـ $x\mapsto \cos x$

الدالة $x\mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x$ أصلية لـ $x\mapsto \cos x\sin^2 x$

إذن: الدالة $x\mapsto \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$ هي دالة أصلية للدالة f

التمرين 11:

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=x\cos x$

أثبت أن: $f(x)+f''(x)=-2\sin x$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على IR

حل التمرين 11 :

$f'(x)=\cos x-x\sin x$

و $f''(x)=-\sin x-\sin x-x\cos x$

و منه : $f''(x)=-2\sin x-f(x)$

أي: $f''(x)+f(x)=-2\sin x$ وهو المطلوب

لدينا: $f''(x)+f(x)=-2\sin x$

إذن: $f(x)=f''(x)-2\sin x$

أي: الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto -f''(x)-2\sin x$

منه: $F(x)=-f'(x)+2\cos x+c$

أي: $F(x)=-\cos x+x\sin x+2\cos+c$

أي: $F(x)=\cos x+x\sin x+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين 12 :

أحسب ما يلي:

1) $\int_1^3 (x^3+2x^2+1)dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x.\sin^2 x)dx$

3) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

4) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

5) $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

6) $\int_{-1}^1 \left(x+1-\frac{1}{x+2}\right)dx$

7) $\int_1^2 \frac{x^4+x^3+x^2+x}{x^2}dx$

حل التمرين 12 :

1)
$$\int_1^3 (x^3+2x^2+1)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+x\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{1}{4}(3)^4+\frac{2}{3}(3)^3+3\right)-\left(\frac{1}{4}(1)^4+\frac{2}{3}(1)^3+1\right)$$
$$=\frac{165}{4}-\frac{23}{12}=\frac{472}{12}=\frac{118}{3}$$

2)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x.\sin^2 x)dx=\left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(\frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{3}\sin^3(0)\right)$$
$$=\frac{1}{3}$$

3)
$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e\left(\frac{1}{x}.\ln x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\ln^2 e-\ln^2 1\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}$$

4)
$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int_1^e\left(\frac{1}{x}.\ln^2 x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(\ln^3 e-\ln^3 1\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}$$

5)
$$\int_1^e\left(\frac{1}{x}.\ln^3 x\right)dx=\left[\frac{1}{4}\ln^4 x\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(\ln^4 e-\ln^4 1\right)\right]$$
$$=\frac{1}{4}$$

6)
$$\int_{-1}^1\left(x+1-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x+2|\right]_{-1}^1$$
$$=\left(\frac{1}{2}.1^2+1-\ln(1+2)\right)-\left(\frac{1}{2}.(-1)^2-1-\ln(-1+2)\right)$$
$$=2-\ln 3$$

7) $\int_1^2 \frac{x^4+x^3+x^2+x}{x^2}dx$

$$= \int_1^2 \left(x^2+x+1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|\right]_1^2$$

$$= \frac{29}{6}-\ln 2$$

التمرين 13:

باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_1^e x\ln x dx$

2) $\int_0^\pi x\cos x dx$

3) $\int_1^2 (x-2)e^x dx$

4) $F(x)=\int_1^x (\ln t)^2 dt$

حل التمرين 13 :

1) نضع $\left.\begin{array}{l} u(x)=\ln x \\ v'(x)=x \end{array}\right\}$ إذن: $\left.\begin{array}{l} u'(x)=1/x \\ v(x)=\frac{1}{2}x^2 \end{array}\right\}$

منه: $\int_1^e x\ln x dx = \int_1^e v'(x)u(x)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^2-0\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$

$$=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2+1}{4}$$

2) نضع $\left.\begin{array}{l} u(x)=x \\ v'(x)=\cos x \end{array}\right\}$ إذن: $\left.\begin{array}{l} u'(x)=1 \\ v(x)=\sin x \end{array}\right\}$

منه: $\int_0^\pi x\cos x dx=\int_0^\pi u(x).v'(x)dx$

$$=\left[u(x).v(x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi u'(x)v(x)dx$$

$$=\left[x\sin x\right]_0^\pi-\int_0^\pi \sin x dx$$

$$=\pi\sin\pi-0\left[-\cos x\right]_0^\pi$$

$$=-(-\cos\pi+\cos 0)=-2$$

3) نضع $\left.\begin{array}{l} u(x)=x-2 \\ v'(x)=e^x \end{array}\right\}$ إذن: $\left.\begin{array}{l} u'(x)=1 \\ v(x)=e^x \end{array}\right\}$.

$$\int_1^2 (x-2)e^x dx=\left[(x-2)e^x\right]_1^2-\int_1^2 e^x dx$$

$$=0-(-e)-\left[e^x\right]_1^2$$

$$=e-\left(e^2-e\right)$$

$$=2e-e^2$$

4) $F(x)=\int_1^x (\ln t)^2 dt$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(t)=(\ln t)^2 \\ v'(t)=1 \end{array}\right\}$ إذن: $\left.\begin{array}{l} u'(t)=\frac{2}{t}\ln t \\ v(t)=t \end{array}\right\}$

منه: $F(x)=\left[t(\ln t)^2\right]_1^x-\int_1^x \frac{2t}{t}\ln t dt$

$$=x(\ln x)^2-2\int_1^x \ln t dt$$

$$=x(\ln x)^2-2\left[t\ln t-t\right]_1^x$$

$$=x(\ln x)^2-2\left[x\ln x-x+1\right]$$

$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x-2$$

ملاحظة: الدالة $t\mapsto t\ln t-t$ هي دالة أصلية للدالة $t\mapsto t\ln t$ على المجال $]0;+\infty[$

التمرين 14:

1) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x: $\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

2) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $\int_0^1 \frac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx$

حل التمرين 14 :

1) من أجل كل x من IR :

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{e^{x}}{e^{x}}\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)=\frac{1}{1+e^{x}}$$

2) التكامل بالتجزئة: نضع $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}} \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\dfrac{-1}{e^{x}+1} \end{cases}$

$$\int_0^1\frac{xe^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}dx=\left[\frac{-x}{e^{x}+1}\right]_0^1-\int_0^1-\frac{1}{e^{x}+1}dx$$

$$=\frac{-1}{e+1}-0-\int_0^1\frac{-1}{e^{x}+1}dx$$

$$=\frac{-1}{e+1}-\int_0^1\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$

$$=\frac{-1}{e+1}-\left[\ln(e^{-x}+1)\right]_0^1$$

$$=\frac{-1}{e+1}-\left[\ln\left(\frac{1}{e}+1\right)-\ln(1+1)\right]=\frac{-1}{e+1}-\ln\left(\frac{1+e}{2e}\right)$$

التمرين 15:

1) (C) منحنى الدالة f على المجال $[0;1]$ حيث

$$f(x)=x^{2}-3x+2$$

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل على المجال $[0;1]$.

2) ليكن (C) منحنى الدالة f على المجال $[0;1]$ حيث

$$f(x)=(x-1)e^{x}$$

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل على المجال $[0;1]$

حل التمرين 15 :

1) لندرس إشارة الدالة f على المجال $[0;1]$ $\Delta=9-8=1$

إذن: $\begin{cases} x_1=\dfrac{3+1}{2}=2 \\ x_2=\dfrac{3-1}{2}=1 \end{cases}$

منه:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)=x^{2}-3x+2$		+	0	-	0	+	

إذن: على المجال $[0;1]$ المنحنى (C) فوق محور الفواصل $(f(x)\geq 0)$ إذن:

$$S=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^{2}-3x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^{3}-\frac{3}{2}x^{2}+2x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2=\frac{5}{6}$$

2) على المجال $[0;1]$ لدينا $x-1\leq 0$ إذن: $(x-1)e^{x}\leq 0$

لأن $e^{x}>0$ منه: $f(x)\leq 0$

$$S=\int_0^1 -f(x)\,dx=\int_1^0 (x-1).e^{x}dx$$

نضع: $\alpha=\int_1^0(x-1)e^{x}dx$ التكامل بالتجزئة:

نضع $\begin{cases} u(x)=x-1 \\ v'(x)=e^{x} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=e^{x} \end{cases}$

منه: $\alpha=\left[(x-1)e^{x}\right]_1^0-\int_1^0 e^{x}dx$

أي: $\alpha=-e^{0}-0-\left[e^{x}\right]_1^0$

أي: $\alpha=-1-(1-e)$

التمرين 16:

f دالة معرفة على $D=R-\{-1\}$ حيث :

$$f(x)=\frac{x^3+x^2-x+3}{(x+1)^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م م $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) تحقق أنه من أجل كل x من D فإن :

$$f(x)=x-1+\frac{4}{(x+1)^2} .$$

2) (Δ) مستقيم معادلته $y=x-1$ حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

3) α عدد حقيقي ثابت حيث $\alpha>1$ أحسب مساحة الحيز من المستوى المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين $x=1$ و $x=\alpha$ ثم حساب نهاية $A(\alpha)$ عند $+\infty$

حل التمرين 16 :

1)

$$x-1+\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+1)^2+4}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)\left(x^2+2x+1\right)+4}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^3+2x^2+x-x^2-2x-x+4}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^3+x^2-2x+4}{(x+1)^2}=f(x)$$

2) تحديد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) : (ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y]$) لدينا : $f(x)-y=\frac{4}{(x+1)^2}$

نلاحظ أن: $f(x)-y>0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ).

3) حساب مساحة الحيز من المستوى المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين $x=1$ و $x=\alpha$ حيث : $\alpha>1$.

$$A(\alpha)=\int_1^\alpha[f(x)-y]\,dx=\int_1^\alpha\left(\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{4}{x+1}\right]_1^\alpha=\left(-\frac{4}{(\alpha+1)}\right)-\left(-\frac{4}{2}\right)$$

$$|=-\frac{4}{\alpha+1}+2\ (u.s)$$

التمرين 17:

f دالة عددية معرفة على $R-\{-1;3\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{2x-7}{x^2-2x-3}$$

1) أحسب نهايات الدالة f على أطراف مجموعة تعريفها ، ثم استنتج معادلات المستقيمات المقاربة لـ (C_f) .

2) أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) أنشئ جدول تغيرات f .

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5) عين إحداثيات نقط تقاطع (Cf) منحنى الدالة f مع محاور الإحداثيات .

6) أنشئ (T) و (Cf) .

7) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل x من $R-\{-1;3\}$:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}$$

ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]3;+\infty[$.

8) أحسب مساحة الحيز من المستوى المحدد بـ (Cf) و محور الفواصل والمستقيمات ذات المعادلات $x=5$ و $x=\frac{7}{2}$.

حل التمرين 17 :

1) حساب النهايات :

$$D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2} = 0$$

و $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2} = 0$$

ومنه : (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$

لأن $\begin{pmatrix} 2x-7 & \to -9 \\ x^2-2x-3 \to 0^+ \end{pmatrix}$ $\quad \lim_{\substack{< \\ x\to-1}} f(x) = -\infty$

لأن $\begin{pmatrix} 2x-7 & \to -9 \\ x^2-2x-3 \to 0^- \end{pmatrix}$ $\quad \lim_{\substack{> \\ x\to-1}} f(x) = +\infty$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=-1$

لأن $\begin{pmatrix} 2x-7 & \to -1 \\ x^2-2x-3 \to 0^- \end{pmatrix}$ $\quad \lim_{\substack{< \\ x\to3}} f(x) = +\infty$

لأن $\begin{pmatrix} 2x-7 & \to -1 \\ x^2-2x-3 \to 0^+ \end{pmatrix}$ $\quad \lim_{\substack{> \\ x\to3}} f(x) = -\infty$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=3$

2) حساب المشتقة : f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{(2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(2x-7)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x-6-4x^2+18x-14}{(x^2-2x-3)^2}$$

ومنه : $$f'(x) = \frac{-2x^2+14x-20}{(x^2-2x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$:

قيم x	$-\infty$		-1		2		3		5		$+\infty$
$-2x^2+14x-20$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
إشارة المقام		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
إشارة $f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

تغيرات الدالة f :

- f متزايدة تماما لما $x \in [2;3[\cup]3;5]$
- f متناقصة تماما لما $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;2] \cup [5;+\infty[$

3) جدول تغيرات الدالة f :

قيم x	$-\infty$		-1		2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

4) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$y = f'(1)\times(x-1) + f$$

حيث : $f'(1) = -\frac{1}{2}$ و $f(1) = -\frac{5}{4}$

ومنه : $$y = \frac{-1}{2}(x-1) + \frac{5}{4}$$

ومنه معادلة المماس (T) : $y = \frac{-1}{2}x + \frac{7}{4}$

5) إحداثيات نقط تقاطع (Cf) مع المحاور:

$(Cf)\cap(yy')$: $f(0) = \frac{7}{3}$

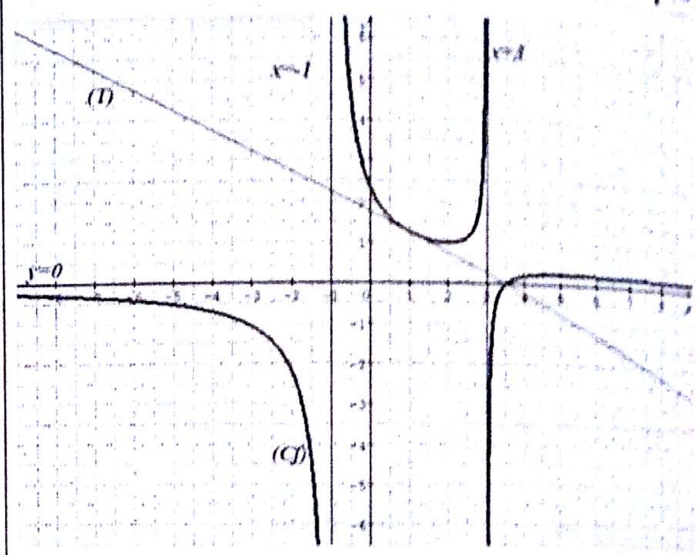
ومنه : $(Cf)\cap(yy') = \left\{\left(0;\frac{7}{3}\right)\right\}$

$f(x)=0$: $(Cf)\cap(xx')$

$2x-7=0$ أي : $x=\dfrac{7}{2}$

ومنه : $(Cf)\cap(xx')=\left\{\left(\dfrac{7}{2};0\right)\right\}$.

6) إنشاء (Cf) :



7) تعيين α و β : من أجل $x\in D_f$:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+2)x+(\beta-3\alpha-2)}{x^2-2x-3}$$

$$=\frac{2x-2+\alpha(x-3)+\beta(x+1)}{x^2-2x-3}$$

بالمطابقة : $(\alpha+\beta+2=2\ ;\ \beta-3\alpha-2=-7)$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \beta-3\alpha=-5\end{cases}\ ;\ \begin{cases}\alpha+\beta+2=2\\ \beta-3\alpha-2=-7\end{cases}\ ;\ \begin{cases}\alpha=\dfrac{5}{4}\\ \beta=\dfrac{-5}{4}\end{cases}$$

$$;\ \begin{cases}\alpha=-\beta\\ 4\beta=-5\end{cases}$$

من أجل $x\in D_f$:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{5}{4(x+1)}-\frac{5}{4(x-3)}$$

$$\int f(x)dx=\int\left(\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{5}{4(x+1)}-\frac{5}{4(x-3)}\right)dx$$

$$=\ln|x^2-2x-3|+\frac{5}{4}\ln|x+1|-\frac{5}{4}\ln|x-3|+c$$

من أجل كل $x\in]3;+\infty[$:

$x-3\succ0$ و $x+1\succ0$ و $x^2-2x-3\succ0$

ومنه : من أجل كل $x\in]3;+\infty[$:

$$|x^2-2x-3|=x^2-2x-3$$

$$|x-3|=x-3$$

$$|x+1|=x+1$$

فالدالة : $x\rightarrow\ln(x^2-2x-3)+\dfrac{5}{4}\ln\dfrac{x+1}{x-3}$

دالة أصلية للدالة f في المجال $]3;+\infty[$.

$$F(X)=\ln(x^2-2x-3)+\frac{5}{4}\ln\frac{x+1}{x-3}$$

8) حساب المساحة: $S=\int_{\frac{7}{2}}^{5}f(x)dx=[F(x)]_{\frac{7}{2}}^{5}(us)$

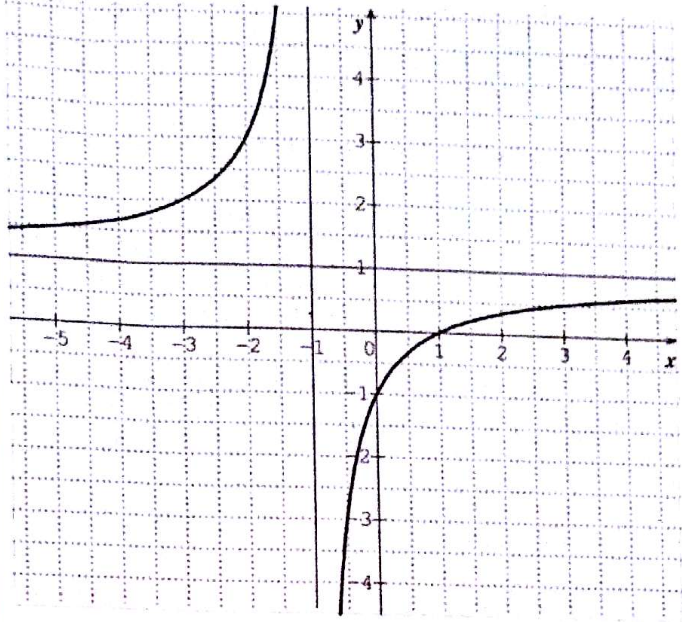
ومنه : $S=\left[\ln(x^2-2x-3)+\dfrac{5}{4}\ln\dfrac{x+1}{x-3}\right]_{\frac{7}{2}}^{5}(us)$

$$=\left(\ln12+\frac{5}{4}\ln3-\ln\frac{9}{4}-\frac{5}{4}\ln9\right)(us)$$

$$=(4\ln2-\frac{9}{4}\ln3)\,us$$

التمرين 18 :

1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $R-\{-1\}$ كما يلي : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني فيالمستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.



أ. شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب. حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

ج. عين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$.

II) أ. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ و (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ ، فسر النتيجتين هندسيا.

2. أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

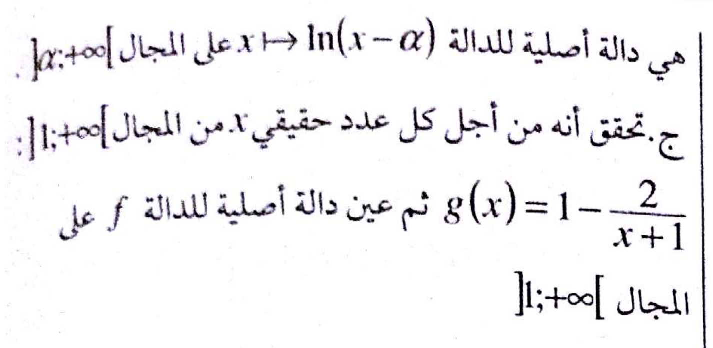
$$g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$$

ب. أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ. باستعمال الجزء I) السؤال ج . عين إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب. α عدد حقيقي. بين أن الدالة :

$$x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$$

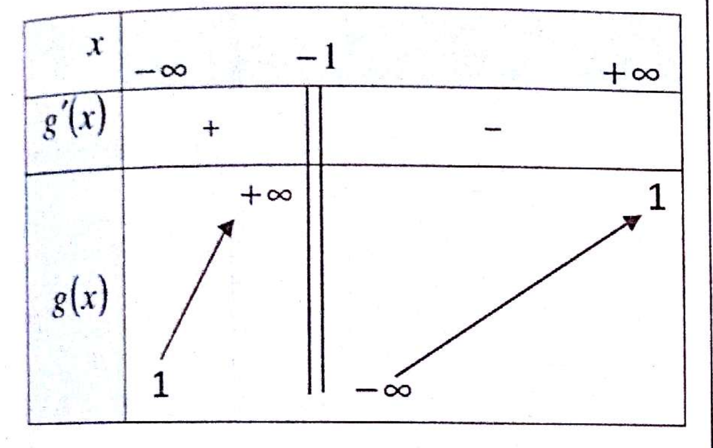


هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

ج. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثم عين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

حل التمرين 18 :

I) أ. تشكيل جدول تغيرات الدالة g :



x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	
$g(x)$	1 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

ب. حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$:

الحل البياني للمتراجحة $g(x)>0$ هو :

$x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

ج. تعيين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$:

من البيان $0<g(x)<1$ لما : $x\in\left]1;+\infty\right[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ و تفسير النتيجتين هندسيا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=1$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}1}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$$

التفسير البياني: $x=1$ مستقيم مقارب عمودي يوازي (yy') بجوار $(-\infty)$.

$y=1$ مستقيم مقارب أفقي يوازي (xx').

2) أ. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

ب. حساب f' و دراسة إشارتها :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2(x-1)+2(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$=\frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$

دراسة إشارة المشتقة: بما أن $x>1$ فإن: $x-1>0$

و $\dfrac{4x}{(x+1)^2}>0$ و عليه من أجل كل x من $]1,+\infty[$:

$f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 1

3) أ/ مما سبق من أجل $x>1$ لدينا: $0<\dfrac{x-1}{x+1}<1$

ونعلم أن $\ln a<0$ لما $a\in]0,1[$ و بالتالي: $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)<0$

و بالتالي إشارة العبارة سالبة.

ب. إثبات أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$:

وعليه الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$ بوضع :

$$k(x)=(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$$

الدالة k معرفة على المجال $]\alpha;+\infty[$ و قابلة للإشتقاق عليه و :

$$k'(x)=\ln(x-\alpha)+(x-\alpha)\times\frac{1}{x-\alpha}-1=\ln(x-\alpha)$$

ج. التحقق أن : $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$:

لدينا : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x+1-2}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$:

لدينا : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ و عليه :

$$f(x)=1-\frac{2}{x+1}+\ln(x-1)-\ln(x+1)$$

مما سبق لدينا :

$x\mapsto(x-1)\ln(x-1)-x$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-1)$

$x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x+1)$

$x\mapsto x-2\ln(x+1)$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto 1-\dfrac{2}{x+1}$

و عليه :

$$F(x)=x-2\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$$
$$-x-(x+1)\ln(x+1)+x$$

أي : $F(x)=x-(x+3)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

التمرين 19 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ :

$$f(x)=e^x-ex-1$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب) أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ج) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

د) ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C) على المجال $]-\infty;2]$.

3) أ) أحسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=\alpha$.

ب) أثبت أن : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

(ua هي وحدة المساحات).

حل التمرين 19 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ :

$$f(x)=e^x-ex-1$$

1. أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-ex-1\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-ex-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-e-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$

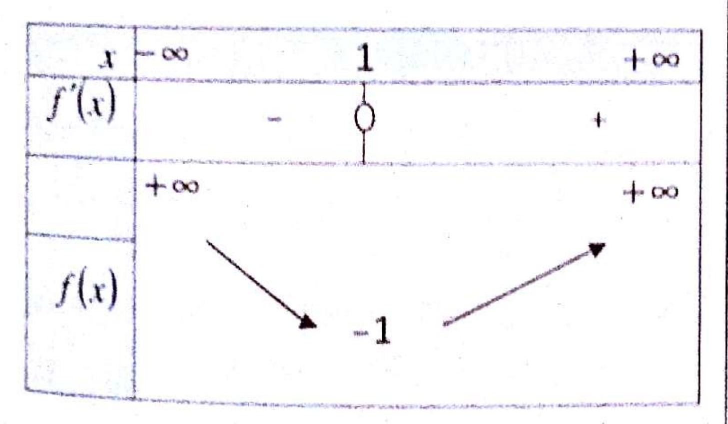
ب) حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها : الدالة f قابلة للاشتقاق على R و : $f'(x)=e^x-e$

دراسة إشارتها : $f'(x)=0$ تعني أن : $e^x-e=0$

أي : $e^x=e$ و بالتالي : $x=1$ ، و عليه : $f'(x)>0$ لما $x>1$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما و : $f'(x)<0$ لما $x<1$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما.

ج) جدول تغيرات الدالة f :

لدينا : $f(1)=e^1-e(1)-1=-1$



x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2. أ. إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$:

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-ex-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-ex-1+ex+1\right)$$

$$=0$$

و منه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-ex-1$

مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب) كتابة معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0:

لدينا: $f(0)=0$ و $f'(0)=1-e$

وعليه: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي: $y=(1-e)x$.

ج) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α:

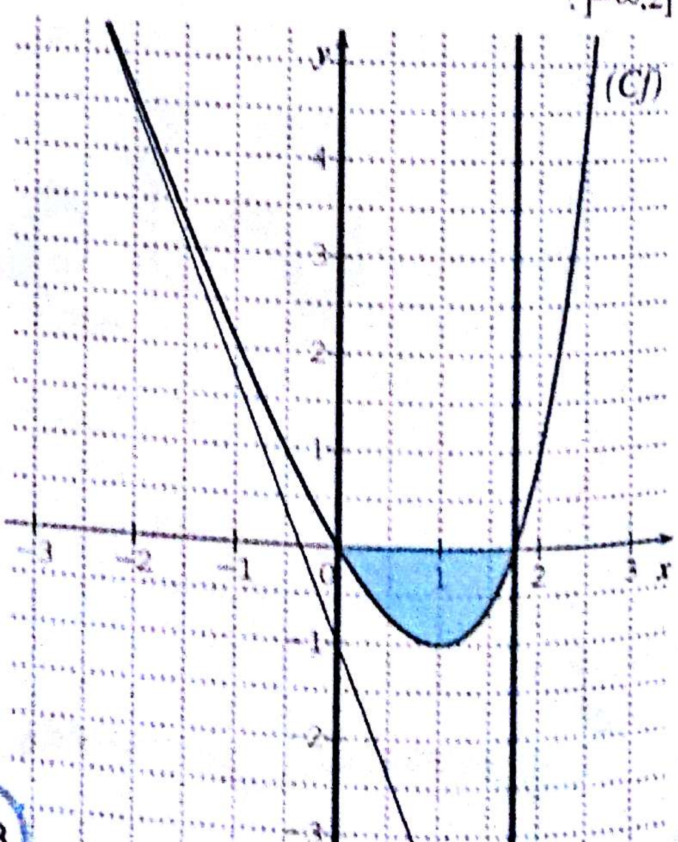
بما أن الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و المجال $]1,75;1,76[\subset]1;+\infty[$ فإن الدالة f مستمرة و متزايدة تماما عليه.

من جهة أخرى: $f(1,75)=e^{1,75}-1,75e-1\approx-0,0024$

$f(1,76)=e^{1,76}-1,76e-1\approx0,028$

وعليه $f(1,75)\times f(1,76)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α وحيد من المجال $]1,75;1,76[$ يحقق: $f(x)=0$.

د) رسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C) على المجال $]-\infty;2]$:



3. أ. حساب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$:

بما أن: $f(x)-y<0$ لما $x\in]0;\alpha[$ فإن:

$$A(\alpha)=\int_0^\alpha[y-f(x)]dx=\int_0^\alpha\left(-e^x+ex+1\right)dx$$

$$A(\alpha)=\left[-e^x+\frac{e}{2}x^2+x\right]_0^\alpha$$

$$A(\alpha)=\left[-e^\alpha+\frac{e}{2}\alpha^2+\alpha\right]-\left(-e^0+\frac{e}{2}(0)^2+0\right)$$

$$=\left[-e^\alpha+\frac{e}{2}\alpha^2+\alpha+1\right]ua$$

ب. إثبات أن: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$:

بما أن $f(\alpha)=0$ فإن: $e^\alpha-e\alpha-1=0$

أي: $e^\alpha=e\alpha+1$

وعليه: $A(\alpha)=\left(-e^\alpha+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1\right)ua$

$$A(\alpha)=\left(-e\alpha-1+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1\right)ua$$

$$=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$$

مواضيع

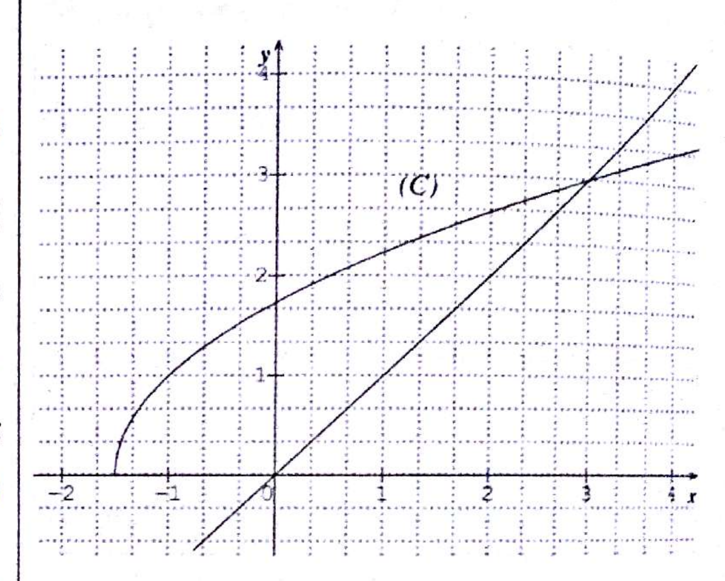
بكالوريا

محلولة

الموضوع 1 (دورة جوان 2012)

التمرين 01:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$.



❶ لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $h(x)=\sqrt{2x+3}$، و (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (أنظر الشكل أعلاه).

أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثّل على محور الفواصل الحدود u_3,u_2,u_1,u_0. (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء).

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

❷ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
$0<u_n<3$.

❸ أ) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 02:

❶ نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z\neq 2-3i$).

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

❷ ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب: z_A و z_B حيث: $z_A=1+i\sqrt{5}$ و $z_B=1-i\sqrt{5}$.

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

❸ نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z، $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها Z' حيث :

$z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ النقط E,D,C لواحقها على الترتيب $z_C=-2i$ ، $z_D=2-3i$ ، $z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

ب- استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ).

التمرين 03:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة:

$14x+16y+13z-47=0$ والنقط $A(1;-2;5)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-1;3;1)$.

❶ أ) تحقق أن النقط A، B و C ليست في استقامية.

ب) بيّن أن المستوي (ABC) هو (P).

❷ جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

❸ أ- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

ب- تحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q).

ج- أحسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB).

التمرين 04:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي:

$f(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❶ أ- أحسب $\lim_{x \to 0} f(x)$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

❷ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$،

$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثم شكّل جدول تغيراتها.

❸ أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

❹ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$.

❺ أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

❻ أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها.

❼ لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي:

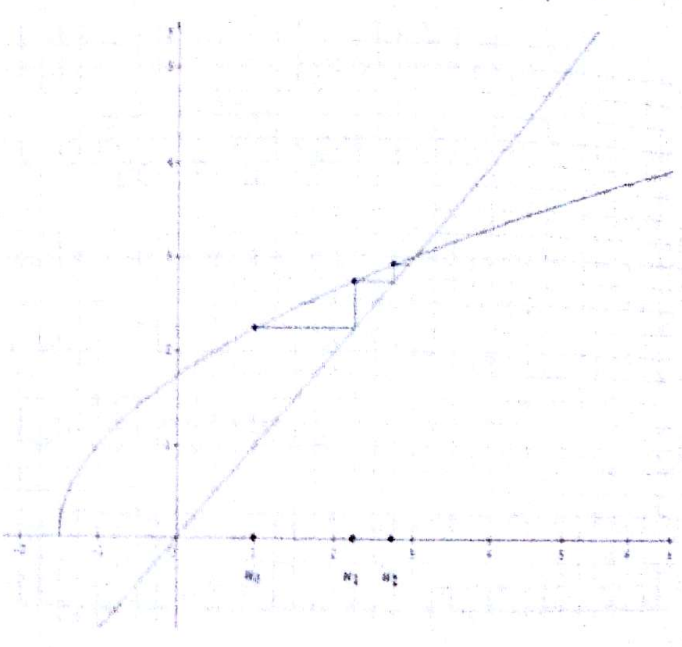
$g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6xLn\left(\frac{x}{x-1}\right)+6Ln(1-x)$

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

حل الموضوع 1 (دورة جوان 2012)

حل التمرين 01:

❶ أ) الرسم:



ب) التخمين: (u_n) متتالية متزايدة ومتقاربة نحو العدد 3.

❷ برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0<u_n<3$:

نسمي $p(n)$ الخاصية "$0<u_n<3$".

التحقق أن $p(0)$ صحيحة: لدينا $u_0=1$ ومنه $0<u_0<3$ إذن $p(0)$ صحيحة.

نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي $0<u_n<3$ ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي: $0<u_{n+1}<3$.

البرهان: لدينا: $0<u_n<3$ بالضرب في العدد 2 نجد $0<2u_n<6$

وبإضافة العدد 3 نجد $0<2u_n+3<9$ ومنه $0<\sqrt{2u_n+3}<\sqrt{9}$

أي: $0<u_{n+1}<3$ إذن: $p(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<3$.

❸ أ) دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n):

دراسة إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$: لدينا:

$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+3}-u_n$ وعليه:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+3}-u_n\times\frac{\sqrt{2u_n+3}+u_n}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

ومنه
$$u_{n+1}-u_n=\frac{\left(\sqrt{2u_n+3}\right)^2-u_n^2}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+3-u_n^2}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}=\frac{-u_n^2+2u_n+3}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

تحليل $-u_n^2+2u_n+3$: بما أن $a+c=b$ فان حلا المعادلة $-u_n^2+2u_n+3=0$ هما (-1) و 3 وعليه:

$$-u_n^2+2u_n+3=-(u_n+1)(u_n-3)$$

أي: $-u_n^2+2u_n+3=(u_n+1)(3-u_n)$

و بالتالي: $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n+1)(3-u_n)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$ وعليه إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$ من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب.

وبما أن $(u_n+1)>0$ فإن إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$ من إشارة $(3-u_n)$.

من جهة أخرى لدينا $u_n<3$ و عليه $-u_n>-3$ و بالتالي $(3-u_n)>0$

إذن $(u_{n+1}-u_n)>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ب) استنتاج أن المتتالية متقاربة: بما أن (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 3 فإن المتتالية (u_n) متقاربة.

حساب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: بما أن (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها موجودة و منتهية و لتكن العدد ℓ .

بوضع: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$

و عليه: $\ell=\sqrt{2\ell+3}$

بالتربيع نجد : $\begin{cases}\ell\geq 0\\ \ell^2=2\ell+3\end{cases}$ أي : $\begin{cases}\ell\geq 0\\ \ell^2-2\ell+3=0\end{cases}$

و بحل المعادلة نجد: $\begin{cases}\ell\geq 0\\ \ell=3\ ;\ \ell=-1\end{cases}$ و بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

حل التمرين 02:

❶ نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z=\dfrac{3i\,(z+2i\,)}{z-2+3i}$ (حيث $z\neq 2-3i$)

$z=\dfrac{3i\,(z+2i\,)}{z-2+3i}$ تعني أن: $z(z-2+3i\,)=3i\,(z+2i\,)$

أي : $z^2-2z+3iz=3iz-6$ أي : $z^2-2z+6=0$

و بالتالي: $\Delta=(-2)^2-4(1)(6)=-20$

أي : $\Delta=\left(2\sqrt{5}i\right)^2$ و بالتالي المعادلة تقبل حلين هما:

$$\begin{cases}z_1=\dfrac{2-2\sqrt{5}i}{2}=1-\sqrt{5}i\\[2mm] z_2=\dfrac{2+2\sqrt{5}i}{2}=1+\sqrt{5}i\end{cases}$$

❷ التحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها: لدينا:

$$|z_A|=\left|1+i\sqrt{5}\right|=\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{6}$$

ومنه: $OA=\sqrt{6}$.

و: $|z_B|=\left|1-i\sqrt{5}\right|=\sqrt{(1)^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{6}$

ومنه: $OB=\sqrt{6}$.

وعليه: $OA=OB$ وبالتالي النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

❸ **أ- التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM:**

لدينا $z'=\dfrac{3i\,(z+2i\,)}{z-2+3i}$ و بتطبيق خواص الطويلة :

$|z'|=\left|\dfrac{3i\,(z+2i\,)}{z-2+3i}\right|$ أي: $|z'|=\dfrac{|3i\,(z+2i\,)|}{|z-2+3i\,|}$

ومنه: $|z'|=\dfrac{|3i|\,|(z+2i\,)|}{|z-2+3i\,|}$

لدينا: $|3i|=3$ و $|z+2i|=|z-(-2i)|=|z-z_C|=CM$

و $|z-2+3i|=|z-(2-3i)|=DM$

أي: $OM'=3.\dfrac{CM}{DM}$.

ب- استنتاج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

بما أن (Δ) محور القطعة $[CD]$ و M نقطة من (Δ) فإن: $CM=DM$. من جهة أخرى لدينا: $OM'=3.\dfrac{CM}{DM}$

و عليه: $OM'=3$ و بالتالي نستنتج أن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها $r=3$.

التحقق أن E تنتمي إلى (γ):

حساب الطول : $OE=|z_E|=|3i|=3$ OE و عليه $OE=r$

وبالتالي النقطة E تنتمي إلى (γ).

حل التمرين 03:

❶ **أ) التحقق أن النقط A, B و C ليست في استقامية:**

لدينا : $\overrightarrow{AB}\,(1;4;-6)$ و $\overrightarrow{AC}\,(-2;5;-4)$.

بما أن $\overrightarrow{AB}\neq\lambda\overrightarrow{AC}$ فإن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا و بالتالي النقط A, B و C ليست في استقامية

ب) إثبات أن المستوي (ABC) هو (P):

لدينا : $14(1)+16(-2)+13(5)-47=14-32+65-47=0$

وعليه النقطة A تنتمي إلى المستوي (P).

من جهة أخرى:

$14(2)+16(2)+13(-1)-47=28+32-13-47=0$

وعليه النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

كذلك:

$14(-1)+16(3)+13(1)-47=-14+48+13-47=0$

وعليه النقطة C تنتمي إلى المستوي (P). ومنه المستوي (ABC) هو (P).

❷ إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB):

نعتبر النقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (AB) ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$

وعليه التمثيل الوسيطي هو: $(\lambda\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=\lambda+1\\y=4\lambda-2\\z=-6\lambda+5\end{cases}$.

❸ أ- كتابة المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$:

المستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$ شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{AB}(1;4;-6)$ والذي يشمل النقطة I منتصف القطعة $[AB]$. لدينا : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

أي : $I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$. نعتبر النقطة $M(x;y;z)$ من المستوي المحوري(Q) وبالتالي المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$ هي $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0$

أي : $1\left(x-\frac{3}{2}\right)+4(y-0)-6(z-2)=0$

ومنه : $x-\frac{3}{2}+4y-6z+12=0$

وبالتالي: $x+4y-6z+\frac{21}{2}=0$

أي : $2x+8y-12z+21=0$.

ب- التحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي(Q):

لدينا : $2x_D+8y_D-12z_D+21=0$

يعني: $2(-1)+8(-2)-12\left(\frac{1}{4}\right)+21=0$

أي : $-2-16-3+21=0$ ومنه : $0=0$

و بالتالي النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q).

ج- حساب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB):

المسافة بين النقطةD والمستقيم(AB) هي الطولIDوعليه:

$$d((\Delta);D)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+(0+2)^2+\left(2-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$d((\Delta);D)=\sqrt{\frac{25}{4}+4+\frac{49}{16}}=\sqrt{\frac{100+64+49}{16}}$$

$$d((\Delta);D)=\frac{\sqrt{213}}{4}$$

حل التمرين 04:

❶ أ- حساب $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}f(x)$، ثم التفسير النتيجة هندسيا:

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}f(x)=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\left[x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$$

(لأن : $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}0}\left[6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$)

ومنه المستقيم الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب عمودي.

ب- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$:

بما أن :$\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\left[6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0\right)$ و$\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty\right)$

فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$

❷ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و دالتها المشتقة:

$$f'(x)=1+6.\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}}=1+6.\frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x)=1+6.\frac{-1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}=1+6.\frac{-1}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)-6}{x(x-1)}$$

أي: $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

استنتاج اتجاه تغيرات الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة المشتقة من إشارة البسط x^2-x-6 لأنه من أجل كل عدد حقيقي x

من $]-\infty;0[$: $x(x-1)>0$.

لدينا: $x^2-x-6=0$ ومنه $x=-2$

وهو مقبول أو $x=3$ وهو مرفوض.

وبالتالي: f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و f متناقصة تماما على المجال $[-2;0[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3+6Ln\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

③ أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل:

المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل يعني أن:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+5)\right]=0 .$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+5)\right]=\lim_{x\to-\infty}6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=Ln1=0$$

ومنه: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

دراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-(x+5)\right]$:

لدينا: $f(x)-(x+5)=6Ln\dfrac{x}{x-1}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ يكون لدينا $x-1<x$. ومنه $\dfrac{x}{x-1}<1$ لأن $(x-1)$ عدد سالب بالقسمة عليه تتغير المتباينة ومنه: $Ln\dfrac{x}{x-1}<Ln1$

وبالتالي $f(x)-(x+5)<0$ أي أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[$.

④ إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$:

لدينا الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و المجال $]-3,5;-3,4[\subset]-\infty;-2]$ فالدالة f مستمرة و رتيبة تماما عليه و $f(-3,5)\approx-0,007$ و $f(-3,4)\approx0,053$

وبالتالي $f(-3,5)\times f(-3,4)<0$

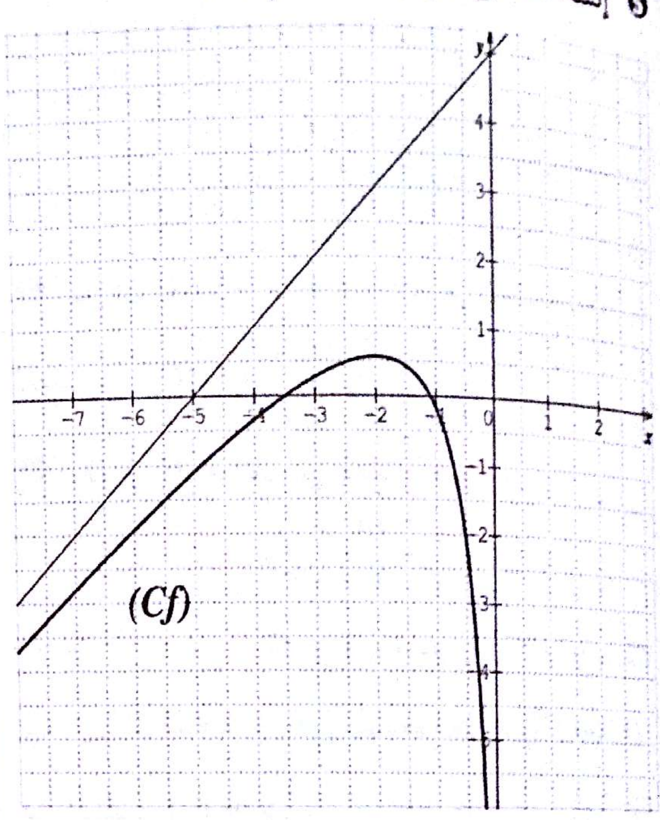
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل α حيث: $-3,5<\alpha<-3,4$.

من جهة أخرى دالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[-2;0[$ والمجال $]-1,1;-1[\subset[-2;0[$ فالدالة f مستمرة و رتيبة تماما عليه. و $f(-1,1)\approx0,02$ و $f(-1)\approx-0,158$

وبالتالي $f(-1,1)\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل β حيث: $-1,1<\beta<-1$.

وعليه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$.

❻ إنشاء المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):



❻ إثبات أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB):

نعتبر النقطة $M\,(x\,,y)$ نقطة من المستقيم (AB)

ومنه: $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AM}$. لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

و $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3-6Ln\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AM}$ يعني أن:

$$(x+1)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(y-3-6Ln\frac{3}{4}\right)(-1)=0$$

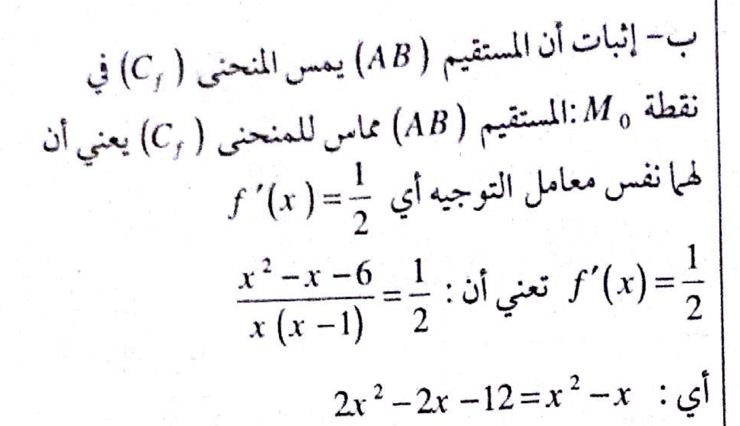
$$-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+y-3-6Ln\frac{3}{4}=0$$

$$-\frac{1}{2}x+y-\frac{7}{2}-6Ln\frac{3}{4}=0$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$$

وبالتالي المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) هي:

$$.\,y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$$



ب- إثبات أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0: المستقيم (AB) مماس للمنحنى (C_f) يعني أن لهما نفس معامل التوجيه أي $f'(x)=\frac{1}{2}$

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تعني أن : $\frac{x^2-x-6}{x\,(x-1)}=\frac{1}{2}$

أي : $2x^2-2x-12=x^2-x$

وبالتالي: $x^2-x-12=0$ بحل المعادلة $x^2-x-12=0$

نجد $x=-3$ مقبول أو $x=4$ هو مرفوض وبالتالي المستقيم (AB) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $M_0\left(-3;2+6Ln\frac{3}{4}\right)$

لأن $f(-3)=2+6Ln\frac{3}{4}$.

❼ g دالة معرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6xLn\left(\frac{x}{x-1}\right)+6Ln(1-x)$$

g دالة أصلية للدالة f يعني أنه من أجل كل x من $]-\infty;0[$: $g'(x)=f(x)$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و:

$$g'(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6x\times\frac{-1}{(x-1)x}+6\frac{-1}{1-x}$$

$$g'(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{-6}{(x-1)}+\frac{-6}{1-x}$$

$$g'(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{-6}{(x-1)}+\frac{6}{x-1}$$

$$g'(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=f(x)$$

ومنه g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

الموضوع 2 (دورة جوان 2012)

التمرين 01:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$.

❶ برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n :

$3<u_n<4$.

❷ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$.

استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.

❸ برّر لماذا (u_n) متقاربة.

❹ (v_n) المتتالية المعرفة على N بـ: $v_n=ln(u_n-3)$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم أحسب حدّها الأول.

ب) أكتب كلاّ من v_n و u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times......\times(u_n-3)$

أكتب P_n بدلالة n ، ثم بيّن أن $\lim_{n\to+\infty} P_n=\frac{1}{16}$.

التمرين 02:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-1;0;1)$ ، $B(2;1;0)$ ، $C(1;-1;0)$.

❶) بين أن النقط B, A و C تعين مستويا.

❷ بيّن أن $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

❸ D و H نقطتان من الفضاء حيث:

$D(2;-1;3)$ و $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$

أ- بين أن النقطة D تنتمي إلى المستوي (ABC).

ب- بين أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

ج- استنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما.

التمرين 03:

❶ $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث:

$P(z)=z^3-12z^2+48z-72$.

أ) تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب) جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$.

ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.

❷ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، C,B,A نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب:

$z_A=6, z_B=3+i\sqrt{3}, z_C=3-i\sqrt{3}$.

أ) أكتب كلا من z_A, z_B, z_C على الشكل الأسي.

ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

❸ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S.

ب) عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S.

ج) بيّن أن النقط A', B, A في استقامية.

التمرين 04:

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 - xe^x$.

❶ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

❷ ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثم شكّل جدول تغيراتها.

❸ أ- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- تحقق أن $0,5 < \alpha < 0,6$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❶ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

❷ لتكن f' مشتقة الدالة f، بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

❸ بيّن أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

❹ أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❺ أ- بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1,6 < x_1 < -1,5$ و $1,5 < x_2 < 1,6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

❻ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = (ax+b)e^x$.

أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

حل الموضوع 2 (دورة جوان 2012)

حل التمرين 01:

(u_n) متتالية معرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي

$$\begin{cases} u_0 = \frac{13}{4} \\ u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3} \end{cases}$$

❶ برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي فإن

$3 < u_n < 4$:

نسمي $p(n)$ هذه الخاصية ونتحقق أن $p(0)$ صحيحة.

لدينا: $u_0 = \frac{13}{4}$ ومنه $3 < u_0 < 4$ إذن $p(0)$ صحيحة.

نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

أي $3 < u_n < 4$ ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي $3 < u_{n+1} < 4$

البرهان: لدينا $3 < u_n < 4$ بإضافة العدد (-3)

نجد $0 < u_n - 3 < 1$

باستعمال الجذر التربيعي نجد $0 < \sqrt{u_n - 3} < 1$ وبإضافة العدد 3 نجد: $3 < 3 + \sqrt{u_n - 3} < 4$ وبالتالي $3 < u_{n+1} < 4$

إذن $p(n+1)$

صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n

أي: $3 < u_n < 4$.

❷ دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3 + u_n - 3}}$$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{2u_n + 3} - u_n$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 3} + 3 - u_n \times \frac{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{u_n - 3}\right)^2 - (3 - u_n)^2}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 3 - \left(u_n^2 - 6u_n + 9\right)}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

$$= \frac{u_n - 3 - u_n^2 + 6u_n - 9}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

دراسة إشارة الفرق $(u_{n+1} - u_n)$:

إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $-u_n^2 + 7u_n - 12$

لأن $\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n) > 0$

و بما أن $-u_n^2 + 7u_n - 12 = (4 - u_n)(u_n - 3)$ فان

إشارة $-u_n^2 + 7u_n - 12$ من إشارة $(4 - u_n)$

لأن $u_n - 3 > 0$.

من جهة أخرى لدينا $u_n < 4$ ومنه $-u_n > -4$

وبالتالي $-u_n + 4 > 0$

وعليه نستنتج أن $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n)

متزايدة تماما.

❸ استنتاج أن المتتالية متقاربة: بما أن (u_n) متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 فإن المتتالية (u_n) متقاربة.

❹ (v_n) متتالية معرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي $v_n = Ln(u_n-3)$.

أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$: (v_n) متتالية هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي q يحقق: $v_{n+1}=q\times v_n$

لدينا: $v_n = Ln(u_n-3)$ وعليه:

$$v_{n+1}=Ln(u_{n+1}-3)=Ln\left(3+\sqrt{u_n-3}-3\right)$$

$$v_{n+1}=Ln\left(\sqrt{u_n-3}\right)=Ln(u_n-3)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}Ln(u_n-3)$$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول v_0 حيث: $v_0=Ln(u_0-3)=Ln\left(\frac{13}{4}-3\right)=Ln\left(\frac{1}{4}\right)$

ب) كتابة كلاًّ من v_n و u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n=v_0\times q^n$ ومنه: $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n Ln\frac{1}{4}$

من جهة أخرى لدينا: $v_n=Ln(u_n-3)$ ومنه $e^{v_n}=u_n-3$

ومنه: $u_n=e^{v_n}+3$ وبالتالي: $u_n=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n Ln\frac{1}{4}}+3$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n Ln\frac{1}{4}}+3\right)$$

حساب: $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\left(e^{0Ln\frac{1}{4}}+3\right)=e^0+3=4$$

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times......\times(u_n-3)$$

كتابة P_n بدلالة n: لدينا $e^{v_n}=u_n-3$

و منه $e^{v_0}=u_0-3$ ، $e^{v_1}=u_1-3$ و $e^{v_2}=u_2-3$

ومنه: $P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times......\times(u_n-3)$

$$P_n=\left(e^{v_0}\right)\left(e^{v_1}\right)\left(e^{v_2}\right)\times.............\times\left(e^{v_n}\right)$$

$$P_n=e^{v_0+v_1+v_2+......+v_n}=e^{v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

ومنه:

$$p_n=e^{Ln\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}=e^{Ln\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}}$$

$$p_n=e^{2Ln\frac{1}{4}\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

حساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} P_n=\lim_{n\to+\infty}\left(e^{2Ln\frac{1}{4}\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}\right)\lim_{n\to+\infty} P_n$$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\left(e^{2Ln\frac{1}{4}\times(1-0)}\right)=e^{2Ln\frac{1}{4}}$$

$$=\left(e^{Ln\frac{1}{4}}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

حل التمرين 02:

❶ **إثبات أن النقط A,B و C تعين مستويا:**

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(2;-1;-1)$ نلاحظ أن $\frac{-1}{-1}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{3}{2}$ إذن لا توجد قيمة k بحيث يكون $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

وبالتالي النقط C,B,A تشكل مستوى.

❷ **إثبات أن $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):**

$2x_A-y_A+5z_A-3=0$ يعني $2(-1)-(0)+5(1)-3=0=0$

أي $A\in(ABC)$ ومنه النقطة A تنتمي إلى المستوى (ABC)

$2x_B - y_B + 5z_B - 3 = 0$

يعني $2(2)-(1)+5(0)-3=0$ أي $B \in (ABC)$

ومنه النقطة B تنتمي إلى المستوى (ABC).

$2x_C - y_C + 5z_C - 3 = 0$

يعني $2(1)-(-1)+5(0)-3=0$ أي $C \in (ABC)$

ومنه النقطة C تنتمي إلى المستوى (ABC).

ومنه المستوي (ABC) هو المستوي $2x - y + 5z - 3 = 0$.

❸ نعتبر $D(2;-1;3)$ والنقطة $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$

أ- إثبات أن النقطة $D(2;-1;3)$ لا تنتمي إلى المستوي :

(ABC) $2x_D - y_D + 5z_D - 3 \neq 0$

لدينا: $2(2)-(-1)+5(3)-3 \neq 0$

$20-3 \neq 0$

$17 \neq 0$

أي: $D \notin (ABC)$ ومنه النقطة D لا تنتمي إلى المستوى (ABC).

ب- إثبات أن النقطة $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة $D(2;-1;3)$ على المستوى: (ABC) H هي المسقط العمودي

للنقطة D على المستوى (ABC) يعني أن $H \in (ABC)$

و $\overrightarrow{DH} = k\overrightarrow{n_{(ABC)}}$

نتحقق أن النقطة $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$ تنتمي إلى المستوى (ABC) أي $2x_H - y_H + 5z_H - 3 = 0$

لدينا: $2\left(\frac{13}{15}\right)-\left(-\frac{13}{30}\right)+5\left(\frac{1}{6}\right)-3 = \frac{26}{15}+\frac{13}{30}+\frac{5}{6}-3$

أي: $\frac{52+13+25-90}{30} = \frac{90-90}{30} = 0$

أي أن $H \in (ABC)$ ومنه النقطة H تنتمي إلى المستوى (ABC).

ومن جهة أخرى لدينا $\overrightarrow{DH}\left(-\frac{17}{15};-\frac{17}{30};-\frac{17}{6}\right)$

بما أن $\overrightarrow{DH} = -\frac{30}{17}\overrightarrow{n_{(ABC)}}$ فان $\overrightarrow{DH}$ و $\overrightarrow{n_{(ABC)}}$ مرتبطان خطيا وبالتالي H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (ABC).

ج- استنتاج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان، ثم إيجاد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما: بما أن $\overrightarrow{DH}$ عمودي على المستوى (ABC) نستنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان.

تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم تقاطعهما: مما سبق نستنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) يشتركان في نقطتين هما H و النقطة A ومنه المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان ومتقاطعان وفق المستقيم (AH).

نعين التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH): نعتبر النقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (AH) ومنه التمثيل الوسيط للمستقيم (AH) هو $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}t$

لدينا $\overrightarrow{AH}\left(\frac{28}{15};-\frac{13}{30};-\frac{5}{6}\right)$ و $\overrightarrow{AM}(x+1;y;z-1)$

و بالتالي: $t \in \mathbb{R}$

$$(AH):\begin{cases} x+1=\frac{28}{15}t \\ y=-\frac{13}{30}t \\ z-1=-\frac{5}{6}t \end{cases}$$

وبالتالي: $t \in \mathbb{R}$

$$(AH):\begin{cases} x=\frac{28}{15}t-1 \\ y=-\frac{13}{30}t \\ z=-\frac{5}{6}t+1 \end{cases}$$

حل التمرين 03:

❶ نعتبر كثير الحدود $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$.

أ) التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$:

لدينا: $P(6)=6^3-126^2+48\times6-72$

$P(6)=0$

ب) تعيين العددين α و β بحيث:

$$P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$$

لدينا: $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$

أي: $P(z)=z^3+(\alpha-6)z^2+(\beta-6\alpha)z-6\beta$

بالمطابقة مع $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$

نجد: $\begin{cases}\alpha-6=-12\\ \beta-6\alpha=48\\ -6\beta=-72\end{cases}$

أي: $\begin{cases}\alpha=-6\\ \beta=12\end{cases}$ وعليه: $P(z)=(z-6)(z^2-6z+12)$

ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ تعني أن $(z-6)(z^2-6z+12)=0$

أي: $\begin{cases}z-6=0\\ z^2-6z+12=0\end{cases}$

أولا: $z-6=0$ ومنه $z=6$.

ثانيا: $z^2-6z+12=0$ ومنه نحسب المميز فنجد

$\Delta=-12$ أي $\Delta=(2\sqrt{3}i)^2$

إذن حلا المعادلة هما $\begin{cases}z_1=\dfrac{6-2\sqrt{3}i}{2}\\ z_2=\dfrac{6+2\sqrt{3}i}{2}\end{cases}$ أي: $\begin{cases}z_1=3-\sqrt{3}i\\ z_2=3+\sqrt{3}i\end{cases}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي:

$S=\{6;3-\sqrt{3}i;3+\sqrt{3}i\}$.

❷ أ) كتابة كلا من z_A، z_B، z_C على الشكل الأسي:

$$z_C=3-i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

$$z_B=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$z_A=6=6e^0$$

ب) كتابة العدد $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري و الأسي:

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{6-3-i\sqrt{3}}{6-3+i\sqrt{3}}$$

ومنه $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\times\frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\frac{9-i6\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2}{3^2+\sqrt{3}^2}$

لدينا: $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{9+2\sqrt{3}i-3}{9+3}=\frac{6-6\sqrt{3}i}{12}$

أي: $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{6(1-\sqrt{3}i)}{12}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

وبالتالي: $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

الشكل الأسي للعدد $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$:

لدينا: $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{\frac{\pi}{3}i}$.

ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا: $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$

ومنه: $\begin{cases}\dfrac{BA}{CA}=1\\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

③ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) إيجاد الكتابة المركبة للتشابه S:

العبارة المركبة للتشابه هي: $z' - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_C)$

$$z' - z_C = \sqrt{3}i(z - z_C)$$
$$z' = \sqrt{3}iz - \sqrt{3}iz_C + z_C$$
$$z' = \sqrt{3}iz - \sqrt{3}i\left(3 - i\sqrt{3}\right) + 3 - i\sqrt{3}$$
$$z' = \sqrt{3}iz - 3\sqrt{3}i - 3 + 3 - i\sqrt{3}$$
$$z' = \sqrt{3}iz - 4\sqrt{3}i$$

ومنه العبارة المركبة للتشابه هي: $z' = \sqrt{3}iz - 4\sqrt{3}i$.

ب) تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S:

A' صورة النقطة A بالتشابه S يعني أن:

$$z_{A'} = \sqrt{3}iz_A - 4\sqrt{3}i$$
$$z_{A'} = 6\sqrt{3}i - 4\sqrt{3}i$$
$$z_{A'} = 2\sqrt{3}i$$

ج) إثبات أن النقط A, B, A' في استقامية:

النقط A, B, A' على استقامة واحدة يعني أن

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_{A'}} \in R$$

لدينا: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_{A'}} = \frac{6 - 3 - \sqrt{3}i}{6 - 2\sqrt{3}i}$

أي: $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_{A'}} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6 - 2\sqrt{3}i} = \frac{\left(3 - \sqrt{3}i\right)}{2\left(3 - \sqrt{3}i\right)} = \frac{1}{2}$

و بالتالي النقط A, B, A' على استقامة واحدة.

حل التمرين 04:

I) لتكن g الدالة المعرفة على R كما يلي: $g(x) = 1 - xe^x$.

❶ حساب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(1 - xe^x\right) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(1 - xe^x\right) = 1$$

❷ دراسة اتجاه تغيرات الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها:

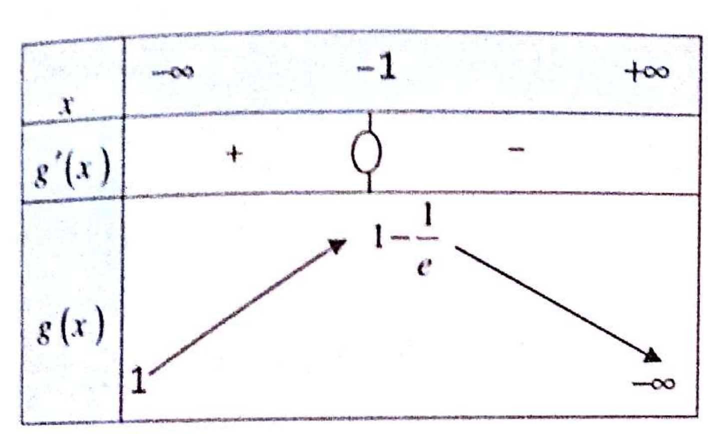
g دالة قابلة للاشتقاق على R ودالتها المشتقة هي g' حيث:

$$g'(x) = -e^x - xe^x$$
$$g'(x) = (-1 - x)e^x$$

إشارة المشتقة من إشارة $-1-x$ لأنه من اجل كل عدد حقيقي: $e^x > 0$.

لدينا $-1 - x = 0$ ومنه: $x = -1$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

جدول التغيرات:



x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	1	↗	$1-\frac{1}{e}$	↘	$-\infty$

❸ أ- إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-1;+\infty[$:

من جدول تغيرات الدالة نلاحظ أن g متناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right]$ و العدد صفر ينتمي إلى $\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right]$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-1;+\infty[$.

ب- التحقق أن $0,5 < \alpha < 0,6$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على R:

لدينا: $g(0,5) = 0,18$ و $g(0,6) = -0,09$

و بما أن $g(0,5) \times g(0,6) < 0$ إذن $0,5 < \alpha < 0,6$.

إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	

II) ❶ حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x-x-1=+\infty$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=0$

❷ **إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$**

فإن $f'(x)=-g(x)$:

f دالة قابلة للاشتقاق على $]-\infty;2]$ ودالتها المشتقة هي f'

حيث: $f'(x)=e^x+(x-1)e^x-1=(1+x-1)e^x-1$

$f'(x)=xe^x-1=-(-xe^x+1)$

$f'(x)=-g(x)$

استنتاج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f:

إشارة المشتقة هي عكس إشارة $g(x)$ وعليه:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة f'	$-$	0	$+$

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$.

و f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ e^2-3

❸ إثبات أن $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$:

لدينا $f(\alpha)=(\alpha-1)e^\alpha-\alpha-1$.

من جهة أخرى لدينا $g(\alpha)=0$ أي: $1-\alpha e^\alpha=0$

وبالتالي: $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$

وعليه: $f(\alpha)=(\alpha-1)\dfrac{1}{\alpha}-\alpha-1$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{\alpha}-\alpha-1=\frac{\alpha-1-\alpha^2-\alpha}{\alpha}$$

بالتعويض نجد: $f(\alpha)=\dfrac{-\alpha^2-1}{\alpha}=-\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}$

$$f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}):

لدينا $0,5<\alpha<0,6$ ومنه $\dfrac{1}{0,6}<\alpha<\dfrac{1}{0,5}$ ....(1)

ومن جهة أخرى $0,25<\alpha^2<0,36$

أي $1,25<\alpha^2+1<1,36$

أي: $-1,36<-(\alpha^2+1)<-1,25$

ومنه: $-\dfrac{1,36}{0,5}<-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)<-\dfrac{1,25}{0,6}$

إذن: $-2,72<f(\alpha)<-2,08$.

❹ **أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:**

لدينا: $f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x$

إذن: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=0$

ومنه (Δ): $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

دراسة إشارة الفرق $[f(x)-(-x-1)]$:

لدينا: $f(x)-(-x-1)=(x-1)e^{x}$ إشارة الفرق من إشارة $(x-1)$ على المجال $]-\infty;1[$ يكون لدينا $f(x)-(-x-1)<0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)وعلى المجال $]1;2]$ يكون لدينا $f(x)-(-x-1)>0$ وبالتالي المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ).

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $M(1;-2)$.

❺ أ- إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1,6<x_1<-1,5$ و $1,5<x_2<1,6$:

لدينا $f(-1,6)=0,08$ و $f(-1,5)=-0,06$

f متناقصة تماما على المجال $[-1,6;-1,5]$

و $f(-1,5)\times f(-1,6)<0$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_1 حيث $-1,6<x_1<-1,5$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

* لدينا $f(1,6)=0,37$ و $f(1,5)=-0,26$

f متناقصة تماما على المجال $[1,5;1,6]$

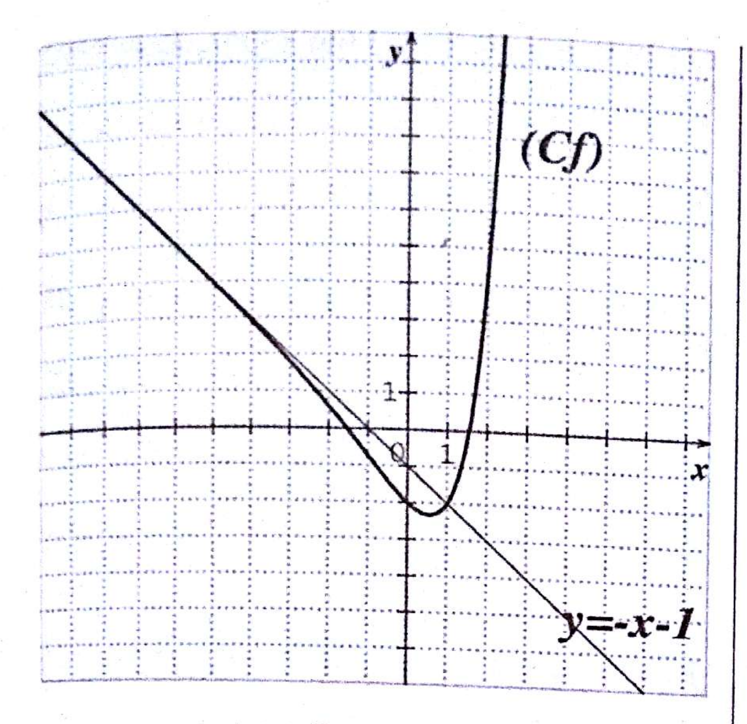
و $f(1,5)\times f(1,6)<0$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_2 حيث $1,5<x_2<1,6$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة ومنه نستنتج أن المنحنى (C_f)

يقطع محور الفواصل في نقطتين هما :

$M_1(x_1;0)$ و $M_2(x_2;0)$.

ب- إنشاء (Δ) و (C_f):



❻ لتكن h الدالة المعرفة على R كما يلي:

$h(x)=(ax+b)e^{x}$.

أ- h دالة معرفة على المجال R كما يلي $x\mapsto xe^{x}$.

تعيين العددين الحقيقيين a و b:

h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ على R يعني أن :

$h'(x)=xe^{x}$

لدينا:

$$h'(x)=ae^{x}+(ax+b)e^{x}$$
$$h'(x)=(ax+a+b)e^{x}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=0\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

وبالتالي عبارة الدالة h هي: $h(x)=(x-1)e^{x}$.

ب- استنتاج دالة أصلية للدالة g على R:

بما أن h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$ فإن الدالة الأصلية للدالة g هي الدالة $x\mapsto x-(x-1)e^{x}+c$ على R.

الموضوع 1(دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01 :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $U_0 = 1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 4$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) أكتب كلا من (u_n) و (v_n) بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) أحسب بدلالة المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$$

أ- بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- أحسب : $\lim_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$

التمرين 02 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط:

$$D(1;1;1) \quad C(1;-1;2) \quad B(-1;2;1) \quad A(2;-1;1)$$

1) أ- تحقق أن النقط A، B، C تعين مستويا.

ب) بين أن $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

جـ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) لتكن النقطة مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;2);(C;-1)\}$

أ) أحسب إحداثيات G.

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{MC}\right\| = 2\left\|\vec{MD}\right\|$$

بين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ) أثبت أن معادلة (Γ) هي : $6x-4y+2z+3=0$

3) بين أن المستويين (ABC) و(Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين 03 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقط A ، B، C، D التي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ و $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$

أ - أكتب z_A وz_A z_A و$z_A.(1+i)$ على الشكل الآسي.

ب) أحسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

جـ) بين أن النقط O ، A، B، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها.

د) أحسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\vec{CA};\vec{CB}\right)$.

ما هي طبيعة الرباعي $OACB$؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) أكتب العبارة المركبة للدوران R.

ب) عين لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط $C'AC$ في إستقامية.

جـ) عين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OA'CB$ بالدوران R

التمرين 04 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ - أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$، فسر النتيجتين هندسيا.

ب) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ - أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=1$

ب) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α حيث $e^{-0.4}<\alpha<e^{-0.3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن الدالة h المعرفة على $R-\{0\}$ كما يلي :

$$h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $h(x)-h(-x)=0$ ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

جـ) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

حل الموضوع 1 (دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01 :

1) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

(v_n) متتالية هندسية إذا تحقق ما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_{n+1}=v_n.q$

حيث q عدد حقيقي ثابت.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}+4=\frac{2}{3}u_n+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{2}{3}(u_n+4)=\frac{2}{3}v_n$$

ومنه v_n متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول :

$$v_0=u_0+4=5$$

2) كتابة كلا من u_n و v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0.q^n=5\left(\frac{2}{3}\right)^n$

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+4$

ومنه : $u_n=v_n-4=5\left(\frac{2}{3}\right)^n-4$

3) دراسة اتجاه تغيرات (u_n) على $\mathbb{N}$:

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}-u_n=-\frac{1}{3}u_n-\frac{4}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}.5\left(\frac{2}{3}\right)^n-4-\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{16}{3}<0$$

وعليه فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

4) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n=u_0+u_1+....+u_n$$

$$=(v_0-4)+(v_1-4)+.....+(v_n-4)$$

$$=(v_0+v_1+......+v_n)+(-4-4..-.......-4)$$

$$=v_0.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}-4(n+1)=5.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}-4n-4$$

$$=15\left(1-\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)-4n-4=11-4n-15\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

د) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$w_n = 5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$$

أ- إثبات أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$w_{n+1}-w_n = 5\left(\frac{1}{v_{n+1}+5}-1\right)-5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$$

$$=\frac{5}{v_{n+1}+5}-\frac{5}{v_n+5}=5\left(\frac{1}{\frac{2}{3}v_n+5}-\frac{1}{v_n+5}\right)$$

$$=5\left(\frac{3}{2v_n+15}-\frac{1}{v_n+5}\right)=5\left(\frac{v_n}{(2v_n+15)(v_n+5)}\right)$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=5\left(\frac{2}{3}\right)^n>0$

ومنه : $w_{n+1}-w_n>0$ ومنه فالمتتالية (w_n) متزايدة تماما.

ب) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)$:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n-w_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(v_n-4-5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)\right)=0$$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5.\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

التمرين 02 :

لدينا النقط : $A(2;-1;1)$، $B(-1;2;1)$، $C(1;-1;2)$، $D(1;1;1)$

1) أ- التحقق أن النقط A، B، C تعين مستويا :

تعين النقط A، B، C مستويا وحيدا إذا كان : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$

$\frac{0}{3}\neq\frac{-1}{-3}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا.

ب) إثبات أن $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1.(-3)+1.(3)+1.(0)=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1.(-1)+1.(0)+1.(1)=0$

بما أن $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ فإن $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستوي (ABC) فإن: $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

$G(x;y;z)$; $\overrightarrow{AM}(x-2;y+1;z-1)$

$$x=\frac{1\times(2)+2\times(-1)-1\times(1)}{1+2-1}=-\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{1\times(-1)+2\times(2)-1\times(-1)}{1+2-1}=2$$

$$z=\frac{1\times(1)+2\times(1)-1\times(2)}{1+2-1}=\frac{1}{2}$$

ومنه : $G\left(\frac{-1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$

ب- (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$$

إثبات أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$:

لدينا : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$

ومنه: $\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{GC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;2);(C;-1)\}$

أي : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=0$

ومنه : $\left\|\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$

$\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ ومنه : $MG=MD$

ومنه : (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$:

جـ - إثبات أن معادلة (Γ) هي: $6x-4y+2z+3=0$

$\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (Γ).

و النقطة $\omega\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$ منتصف القطعة المستقيمة $[GD]$.

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستوي فإن : $\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{\omega M}=0$

$\overrightarrow{\omega M}\left(x-\frac{1}{4};y-\frac{3}{2};z-\frac{3}{4}\right)$ و $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{GD}\cdot\overrightarrow{\omega M}=0$$

$$\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)-1\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(z-\frac{3}{4}\right)=0$$

$$\frac{3}{2}x-y+\frac{1}{2}z+\frac{3}{4}=0$$

$$3x-4y+2z+3=0$$

3) إثبات أن المستويين (ABC) و(Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له :

$$\begin{cases}3x-4y+2z+3=0\\ x+y+z-2=0......\times(-2)\end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases}3x-4y+2z+3=0..........(1)\\ -2x-2y-2z+4=0.......(2)\end{cases}$$

بجمع (1) و(2) نجد :
$$x-6y+7=0$$
$$x=6y-7$$

بوضع: $y=t$ نحصل على: $x=6t-7$

نعوض x و y في المعادلة : $x+y+z-2=0$

$$z=-x-y+2$$

نجد: $z=-6t+7-t+2$

$$z=-7t+9$$

ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو
$$\begin{cases}x=6t-7\\ y=t\\ z=-7t+9\end{cases}$$

مع : $t\in IR$

التمرين 03 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

$$z^2-6\sqrt{2}\,z+36=0$$

$$\Delta'=b'^2-ac=\left(-3\sqrt{2}\right)^2-1\times36=-18=\left(3\sqrt{2}.i\right)^2$$

$$z_1=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}.i$$

$$z_2=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}.i$$

2) أ- كتابة z_A وz_A و$z_A.(i+1)$ على الشكل الآسي.

$$Z_A=3\sqrt{2}(1+i)=6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=6\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ومنه : $Z_A=6.e^{i.\frac{\pi}{4}}$

$$Z_B=\overline{Z_A}=6.e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

لدينا : $|1+i|=\sqrt{2}$ و $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

ومنه : $|(1+i).Z_A|=6\sqrt{2}$

و $\arg[(1+i).Z_A]=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

ومنه : $(1+i).Z_A=6\sqrt{2}.e^{i.\frac{\pi}{2}}$

ب - حساب : $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(\frac{6\sqrt{2}.e^{i.\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=e^{i.\frac{\pi}{2}.2014}=e^{i.1007\pi}$$

$$=\cos(1007\pi)+i.\sin(1007\pi)$$
$$=\cos\pi+i.\sin\pi=-1$$

ج -إثبات أن النقط O ، A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها.

$$OD=|Z_D-Z_O|=\left|\frac{6\sqrt{2}}{2}\right|=3\sqrt{2}$$

$$AD=|Z_D-Z_A|=\left|\frac{6\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{2}(1+i)\right|=3\sqrt{2}$$

$$BD=|Z_D-Z_B|=\left|\frac{6\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{2}(1-i)\right|=3\sqrt{2}$$

$$CD=|Z_D-Z_C|=\left|\frac{6\sqrt{2}}{2}-6\sqrt{2}\right|=3\sqrt{2}$$

بما أن: $OD=AD=BD=CD=3\sqrt{2}$

فإن النقط O ، A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$

د-حساب : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{3\sqrt{2}(1-i)-6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1+i)-6\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}(1-i-2)}{3\sqrt{2}(1+i-2)}=\frac{-1-i}{-1+i}=\frac{(-1-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{2i}{2}=i$$

إيجاد قيسا للزاوية $(\vec{CA};\vec{CB})$

$$\arg\left(\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$$

$$(\vec{CA};\vec{CB})=\frac{\pi}{2}$$

المثلث ABC قائم في C وتساوي الساقين لأن

$$\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\frac{CB}{CA}=|i|=1$$

وبما أن $OD=AD=BD=CD$

فإن النقطة D منتصف $[AB]$ والنقطة D منتصف $[AB]$.

وعليه فإن الرباعي $OACB$ مربع

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- كتابة العبارة المركبة للدوران R :

العبارة المركبة للدوران R تكتب على الشكل : $Z'=aZ+b$

حيث : $|a|=1$ و $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$ ومنه : $a=i$

وبما أن مركزه O فإن : $Z_0=a\,Z_0+b$ ومنه $b=0$

ومنه العبارة المركبة للدوران R : $Z'=i.Z$

ب- تعيين لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R :

$$Z_{C'}=i.Z_C=6\sqrt{2}.i$$

التحقق أن النقط C، A، C' في إستقامية.

$\vec{AC}(6\sqrt{2}-3\sqrt{2};0-3\sqrt{2})$ ومنه : $\vec{AC}(3\sqrt{2};-3\sqrt{2})$

$\vec{AC'}(0-3\sqrt{2};6\sqrt{2}-3\sqrt{2})$ ومنه : $\vec{AC'}(-3\sqrt{2};3\sqrt{2})$

أي : $\vec{AC}=-\vec{AC'}$ وعليه النقط C، A، C' في إستقامية.

جـ- تعيين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R :

$$Z_{A'}=i.Z_A=i\left[3\sqrt{2}(1+i)\right]=3\sqrt{2}(-1+i)$$

صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R هو الرباعي $OA'C'A$

لأن: $R(O)=O$ و $R(A)=A'$ و $R(C)=C'$ و $R(B)=A$.

التمرين 04 :

$$D_f=]0;+\infty[\text{ و } f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$$

1) أ- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ لأن : $\left[\frac{\ln x}{x}\to 0\right]$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=1$

$\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$ لأن : $\begin{bmatrix}\ln x\to-\infty\\ x\to 0^+\end{bmatrix}$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

ب- دراسة اتجاه تغيرات الدالة f من أجل كل x من : $]0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2.\frac{1}{x}.x-1.(2\ln x)}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

إشارة من إشارة البسط لأن المقام موجب تمام.

نضع: $1-\ln x=0$ و $1-\ln x>0$

$\ln x=1$ $\qquad$ $\ln x<1$

$x=e$ $\qquad$ $x<e$

قيم x	0	e	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+		-

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0,e]$ متناقصة تماما على المجال $[e;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f:

قيم x	0		e		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	
إشارة $f(x)$	0	↗	$1+\frac{2}{e}$	↘	1

2) أ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$: $f(x)-y=\frac{2\ln x}{x}$

قيم x	0		e		$+\infty$
إشارة $2\ln x$		+	0	-	
إشارة x		+		+	
إشارة $f(x)-y$		-	0	+	
وضعية (C_f) بالنسبة(Δ)		تحت	يقطع	فوق	

ب) معادلة المماس (T) للمنحنى في النقطة ذات الفاصلة 1:

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ حيث : $f(1) = 1$ ، $f'(1) = 2$

ومنه : $y = 2x - 1$

جـ - الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]0,1]$

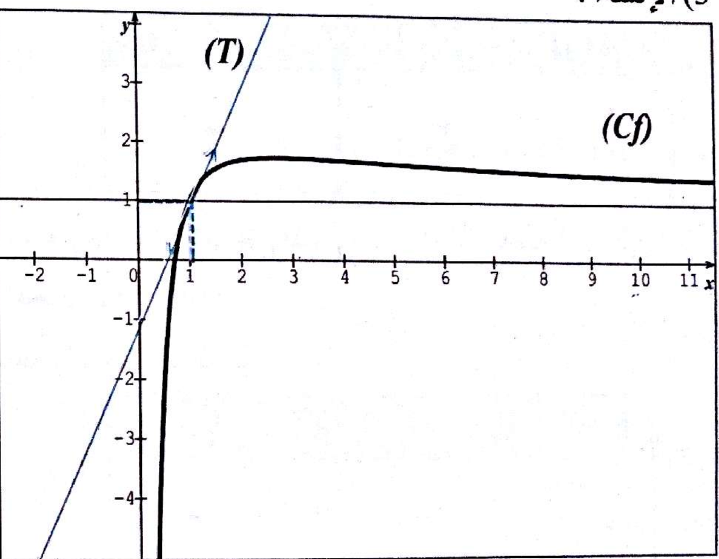
و $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ و $f(1) = 1$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\times f(1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0,1]$ حلا وحيدا α وبما أن :

$[e^{-0.4}, e^{-0.3}] \subset]0;1]$ و $f(e^{-0.4}) \approx -0.2$ و $f(e^{-0.3}) \approx 0.2$

أي : $f(e^{-0.4})\times f(e^{-0.3}) < 0$ فإن : $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$

3) الإنشاء :



4) $h(x) = 1 + \dfrac{2\ln|x|}{|x|}$ و $D_h = R - \{0\}$

أ - إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$h(x) - h(-x) = 0$

$$h(-x) - h(x) = 1 + \frac{2\ln|-x|}{|-x|} - 1 - \frac{2\ln|x|}{|x|}$$

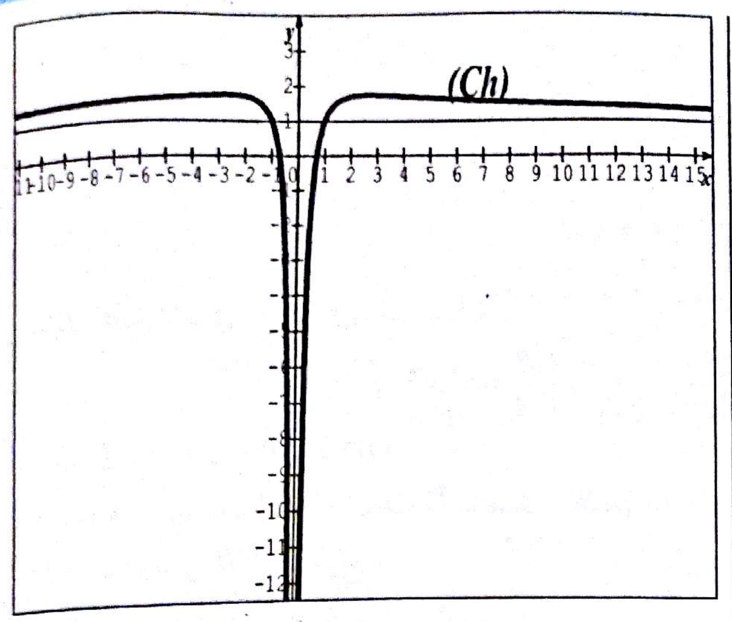
$$= \frac{2\ln|x|}{|x|} - \frac{2\ln|x|}{|x|} = 0$$

ومنه نستنتج أن h دالة زوجية.

ب - لما $x \in]0,+\infty[$ فإن : $h(x) = 1 + \dfrac{2\ln x}{x} = f(x)$

وعليه فإن (C_h) ينطبق على (C_f)

وبما أن h دالة زوجية فإن (C_h) يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.



جـ - المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $\ln x^2 = (m-1)|x|$

لدينا : $\ln x^2 = (m-1)|x|$ ومنه : $\dfrac{\ln x^2}{|x|} = m - 1$

ومنه : $\dfrac{2\ln|x|}{|x|} + 1 = m$ ومنه : $h(x) = m$

وبالتالي فإن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_h) مع المستقيم الذي معادلته $y = m$

قيم m	$-\infty$		1		$1+\frac{2}{e}$		$+\infty$
		حلين	حلين	4 حلول	حلين	لا يوجد حلول	

الموضوع 2(دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01 :

❶ نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

1) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$ ماذا تستنتج.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

❷ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln u_n$

(ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري)

1) عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).

2) أ - أحسب بدلالة n العدد P_n حيث :

$$P_n = \ln (u_0 \times u_1 \times ... \times u_n)$$

ب - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$

التمرين 02 :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;-1;-2)$ ، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$

1) أ - برهن أن A وB وC ليست في استقامية.

ب - أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).

ج - تحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) نعتبر المستويين (P) و(Q) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي:

$(P): x - y - 2z + 5 = 0$ و $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$

برهن أن (P) و(Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \quad ;(t \in R) \\ z = t + 1 \end{cases}$

3) عين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و(Q) .

4) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $d(M,(P))$ المسافة بين M والمستوي (P) و $d(M,(Q))$ المسافة بين M والمستوي (Q).

عين المجموعة (Γ) للنقط M بحيث :

$$\sqrt{6} \times d(M,(P)) = \sqrt{14} \times d(M,(Q))$$

التمرين 03 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z حيث : $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول cm)، تعطى النقط A وB وC التي لواحقها : $z_A = i$ ، $z_B = 1 + 2i$ و $z_C = 1 - 2i$ على الترتيب.

أ - أنشئ النقط A وB وC.

ب - جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

جـ - أحسب مساحة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - عين الكتابة المركبة للتشابه S.

ب - بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2} cm^2$

4) M نقطة لاحقتها z ؛ عين مجموعة النقط M حيث :

$$|z| = | iz + 1 + 2i |$$

التمرين 04 :

❶ لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR كما يلي :

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1) أ - أحسب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

ب - أدرس اتجاه تغير الدالة g على IR ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ - بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :

$$0.7 < \alpha < 0.8$$

ب - استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

❷ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ - بين أنه من أجل كل x من IR :

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب - استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعين معادلته.

ج - أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و (Δ).

3) أ - بين أنه من أجل كل x من IR :

$$f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

حيث f' مشتقة الدالة f.

ب - استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f(x)$ (نأخذ $f(\alpha)\approx 0{,}1$)

4) أحسب $f(1)$ ثم حل في IR المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرفة على IR كما يلي:

$$h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ - تحقق أنه من أجل كل x من IR : $h(x)=f(x)-2$

ب - استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه. ثم أنشئ (C_h).

حل الموضوع 2(دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01 :

❶ نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية IN بحدها العام : $u_n=e^{\frac{1}{2}-n}$

(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

1) إثبات أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول.

(u_n) متتالية هندسية إذا تحقق ما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1}=u_n\times q$

حيث q عدد حقيقي ثابت.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=e^{\frac{1}{2}-(n+1)}=e^{\frac{1}{2}-n-1}=e^{\frac{1}{2}-n}.e^{-1}=\frac{1}{e}.u_n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها : $q=\frac{1}{e}=e^{-1}$

وحدها الأول : $u_0=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

2) حساب : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}-n}=0$$

نستنتج أن (u_n) متتالية متقاربة نحو العدد 0.

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n$$

$$S_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\sqrt{e}\frac{1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{1-e^{-1}}$$

$$=\sqrt{e}.\frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}$$

$v_n = \ln u_n$ ، n نضع من أجل كل عدد طبيعي

1) عبارة (v_n) بدلالة n ثم استنتاج نوع المتتالية (v_n) :

$$v_n = \ln u_n = \ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right) = \frac{1}{2} - n$$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} - (n+1) = \frac{1}{2} - n - 1 = v_n - 1$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -1$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$

2) أ- حساب بدلالة n العدد P_n :

$$P_n = \ln(u_0 u_1 u_2 .... u_n)$$
$$= \ln(u_0) + \ln(u_1) + ... + \ln(u_n)$$
$$= v_0 + v_1 + ... + v_n$$
$$= \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{(n+1)(1-n)}{2}$$

ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$

$$P_n + 4n > 0$$
$$\frac{(n+1)(1-n)}{2} + 4n > 0$$
$$\frac{-n^2+1}{2} + 4n > 0$$
$$\frac{-n^2+8n+1}{2} > 0$$
$$-n^2 + 8n + 1 > 0$$

ومنه $n \in [0;8]$ و n عدد طبيعي.

أي : $n \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$

التمرين 02 :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;-1;-2)$ ، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$

1) أ- إثبات أن A و B و C ليست في استقامية.

$\vec{AB}(0;-1;-1)$ و $\vec{AC}(1;1;2)$

ولدينا : $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1}$ ومنه الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا، ومنه النقط A و B و C ليست في استقامية.

ب) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) :

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستوى (ABC) فإنه نحقق :

$\vec{AM} = \alpha.\vec{AB} + \beta.\vec{AC}$ حيث : $\alpha \in R$

ومنه :
$$\begin{cases} x-1 = \alpha.0 + \beta.1 \\ y+1 = \alpha.(-1) + \beta.1 \\ z+2 = \alpha.(-1) + \beta.(2) \end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = -\alpha + \beta - 1 \\ z = -\alpha + 2\beta - 2 \end{cases}$$

ج - التحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

نعوض إحداثيات النقطة A في المعادلة نجد : $0 = 0$

نعوض إحداثيات النقطة B في المعادلة نجد : $0 = 0$

نعوض إحداثيات النقطة C في المعادلة نجد : $0 = 0$

ومنه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي :

$$x + y - z - 2 = 0$$

2) نعتبر المستويين (P) و(Q) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي:

$(P): x - y - 2z + 5 = 0$ و $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$

إثبات أن (P) و(Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي :
$$\begin{cases} x = t-3 \\ y = -t \quad ;(t \in R) \\ z = t+1 \end{cases}$$

$\vec{n}(1;-1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوى (P)

$\vec{n'}(3;2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوى (Q)

لدينا $\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{3}$ ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه المستويين (P)و(Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

نعوض
$$\begin{cases} x = t-3 \\ y = -t \\ z = t+1 \end{cases}$$
في المعادلة $x + y - z - 2 = 0$:

$t - 3 - (-t) - 2(t+1) + 5 = 0$ أي $0 = 0$

ومنه : $(\Delta) \subset (Q)$

ومنه : (P) و(Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) .

3) تعيين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q) .

نعلم أن : $(P)\cap(Q)=(\Delta)$

نعوض $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-t \\ z=t+1 \end{cases}$ في المعادلة الديكارتية للمستوي و (ABC).

نجد : $t-3-t-t-1-2=0$

4) تعيين المجموعة (Γ) للنقط M بحيث :

$$\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$$

$$\sqrt{6}.\frac{|x-y-2z+5|}{\sqrt{6}}=\sqrt{14}.\frac{|3x+2y-z+10|}{\sqrt{14}}$$

$$|x-y-2z+5|=|3x+2y-z+10|$$

$$(x-y-2z+5)^2=(3x+2y-z+10)^2$$

$$(x-y-2z+5)^2-(3x+2y-z+10)^2=0$$

$$[4x+y-3z+15].[-2x-3y-z-5]=0$$

ومنه: $4x+y-3z+15=0$

أو $2x+3y+z+5=0$

وعليه فإن المجموعة (Γ) هي : $(P_1)\cup(P_2)$

حيث (P_1) مستو معادلته : $4x+y-3z+15=0$

و (P_2) مستو معادلته : $2x+3y+z+5=0$

التمرين 03 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z

حيث : $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

أي : $z-i=0$ ومنه : $z=i$

أو : $z^2-2z+5=0$

$\Delta=-16=(4i)^2$

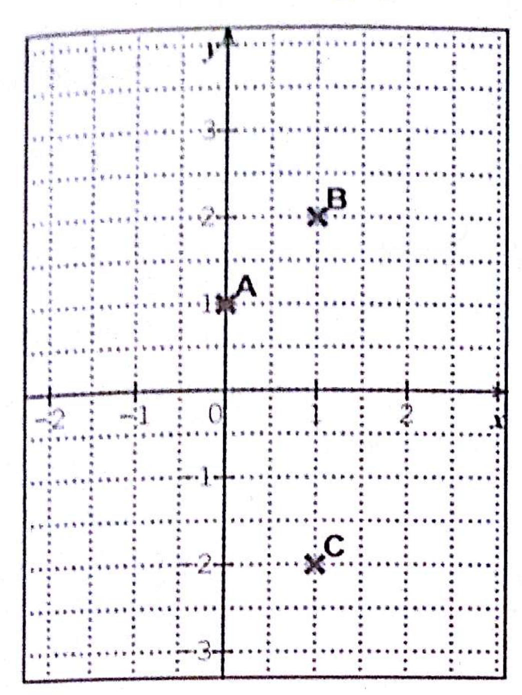
ومنه : $z_1=\frac{2-4i}{2}=1-2i$ و $z^2-2z+5=0$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

$$S=\{i;1-2i;1+2i\}$$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول cm)، تعطى النقط A و B و C التي لواحقها : $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ و $z_C=1-2i$ على الترتيب.

أ - إنشاء النقط A و B و C.



ب - إيجاد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

$H\in(BC)$ ومعادلة (BC) هي : $x=1$

والمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة H وعمودي على (BC) معادلته هي : $y=1$.

وعليه فإن النقطة H هي نقطة تقاطع (Δ) و (BC).

أي $H(1,1)$ ومنه $z_H=1+i$

جـ - حساب مساحة المثلث ABC.

$$S=\frac{AH.BC}{2}$$

$$AH=|Z_H-Z_A|=|1|=1$$

$$BC=|Z_C-Z_B|=|-4i|=4$$

ومنه : $S=2cm^2$

3) ليكن S التشابه الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - تعيين الكتابة المركبة للتشابه S.

العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل: $z'=Az+B$

حيث : $|a|=\frac{1}{2}$ و $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$ ومنه: $a=\frac{1}{2}i$

ومنه: $Z' = \frac{1}{2}iZ + b$

وبما أن S مركزه A: $Z_A = \frac{1}{2} i Z_A + b$

$b = Z_A - \frac{1}{2}iZ_A = \frac{1}{2} + i$

ومنه الكتابة المركبة لـ S هي: $Z' = \frac{1}{2}.iZ + \frac{1}{2} + i$

ب - إثبات أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$

لدينا: $S(A) = A$ و $S(H) = H'$ و $S(B) = B'$ و $S(C) = C'$

ولدينا: $AH' = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}$ و $B'C' = \frac{1}{2}BC = 2$

ومنه مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S هي L.

حيث: $L = \frac{AH'.B'C'}{2} = \frac{1}{2}cm^2$

4) M نقطة لاحقتها z ؛ عين مجموعة النقط M حيث

$$|z| = |\ iz + 1 + 2i\ |$$

نعلم أن: $|z| = OM$

$|\ iz + 1 + 2i\ | = |i(z - (-2 + i))| = |i||z - z_D| = DM$

ومنه: $OM = DM$

ومنه مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[OD]$ حيث $D(-2;1)$.

التمرين 04:

❶ لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR كما يلي :

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1) أ- حساب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$$

ب - دراسة اتجاه تغير الدالة g على IR .

من أجل كل $x \in R$: $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

إشارة $g'(x)$: $\Delta = (8)^2 - 4.6.7 = -104$

ومنه $g'(x) > 0$ من أجل كل $x \in R$.

وبالتالي g متزايدة تماما على IR.

جدول تغيراتها :

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2) أ - إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :

$$0.7 \langle \alpha \langle 0.8$$

g مستمرة ومتزايدة على IR

$g(0.7) \approx -0.37$ و $g(0.8) \approx 0.06$

أي : $g(0.7) \times g(0.8) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.7 \langle \alpha \langle 0.8$

ب – استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-		+

❷ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

1) حساب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

2) أ -إثبات أنه من أجل كل x من IR :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2 - 2x + 1)} = \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + 1) + (1 - 3x)}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + 1 + 1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$$= \frac{2x^3 - 4x + x + 2}{2(2x^2 - 2x + 1)} = \frac{2(x^3 - 2x + 1)}{2(2x^2 - 2x + 1)} = f(x)$$

ب – استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعين معادلته.

لدينا : $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-3x}{4x^2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-3}{4x}=0$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ و$-\infty$

معادلته : $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ج – أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و (Δ).

$$f(x)-y=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

إشارة $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$ من إشارة $1-3x$ وعليه :

(C_f) يقع فوق (Δ) لما $x\in\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

(C_f) يقع تحت (Δ) لما $x\in\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

(C_f) يقطع تحت (Δ) في النفطة : $A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

3) أ-إثبات أن من أجل كل x من IR:

$$f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

حيث f' مشتقة الدالة f.

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2)(2x^2)-2x+1-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^4-4x^3+7x_2-4x}{(2x_2-2x+1)^2}=\frac{x(2x^3-4x_2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x\,g(x)$ لأن المقام دوما موجب

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$g(x)$		-		-	0	+	
$xg(x)$		+	0	-	0	+	

وعليه : f متزايدة على المجالين : $]-\infty,0]$ و $[\alpha;+\infty[$

f متناقصة على المجال $[0;\alpha]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) حساب $f(1)$ ثم حل في IR المعادلة $f(x)=0$.

$f(1)=0$

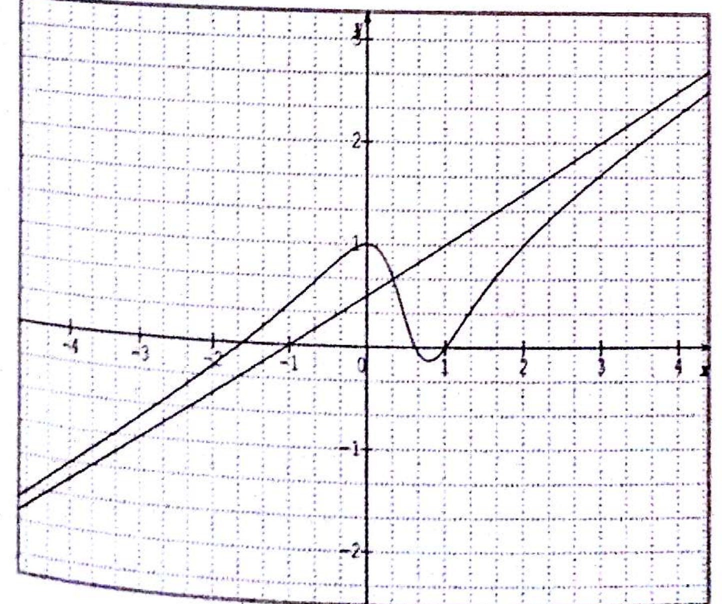
$f(x)=0$ يعني : $x^3-2x+1=0$

أي : $(x-1)(x^2+x-1)=0$

وبالتالي : $x-1=0$ أو $x^2+x+1=0$

ومنه : $x=1$ أو $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ و $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).



) لتكن ا الدالة المعرفة على IR وكما يلي:

$$h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

-التحقق أنه من أجل كل x من IR : $h(x)=f(x)-2$

$$f(x)-2=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}-2$$

$$=\frac{x^3-2x+1-4x^2+4x-2}{2x^2-2x+1}$$

$$=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}=h(x)$$

- استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط
لب تعيينه. ثم أنشئ (C_h).

لدينا : $h(x)=f(x)-2$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(0;-2)$

أنشاء (C_h) :

